

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

О.Н. ГРАНИЧИН

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ  
СТОХАСТИЧЕСКОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ  
И ОЦЕНИВАНИЯ

У ч е б н о е   п о с о б и е

Издательство С.-Петербургского университета  
2 0 0 3

УДК 519.712

ББК 32.811.7

Г 77

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук проф. *А.Е. Барабанов*  
(С.-Петербургский гос. ун-т)  
канд. физ.-мат. наук доц. *А.И. Шепелявый*  
(С.-Петербургский гос. ун-т)

*Рекомендовано к изданию*

*Редакционно-издательским советом*

*математико-механического факультета*

*С.-Петербургского государственного университета*

Г р а н и ч и н О.Н.

Г 77 **Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания:** Учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. — 131 с.

ISBN 5-288-03201-7

В пособии дается систематическое изложение основ методов стохастической многомерной оптимизации и оценивания в условиях наблюдений с помехами. Кроме классических результатов, при формулировке которых обычно рассматриваются постановки задач в отсутствие помех либо при стандартных предположениях об их статистических характеристиках (независимость и центрированность в теоретико-вероятностном смысле), в учебное пособие включен материал об алгоритмах, дающих состоятельные оценки неизвестных (или оптимизируемых) параметров при почти произвольных помехах.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, обучающихся на специальностях, связанных с обработкой информации, в частности изучающих курс "Оптимизация систем реального времени"; оно может использоваться при подготовке специалистов по статистическим методам оценивания и стохастической оптимизации.

Библиогр. 78 назв.

Без объявления

ББК 32.811.7

© О.Н. Граничин,  
2003

© Издательство  
С.-Петербургского  
университета,  
2003

ISBN 5-288-03201-7

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>Введение</b> .....	5
<b>Список обозначений</b> .....	19
<b>Методы оценивания и оптимизации</b> .....	21
<b>1. Примеры задач оценивания</b> .....	—
1.1. Оценивание величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи .....	—
1.2. Задача об обнаружении сигнала .....	25
1.3. Рандомизированные алгоритмы .....	28
1.4. Функционал среднего риска .....	29
1.5. Предсказание значений случайного процесса .....	31
<b>2. Элементы регрессионного анализа, метод наименьших квадратов</b> .....	33
2.1. Наилучшая аппроксимация одной случайной величины с помощью другой .....	—
2.2. Оценивание по конечному числу наблюдений .....	36
2.3. Рекуррентные модификации метода наименьших квадратов .....	42
<b>3. Оптимальная фильтрация случайных процессов</b> .....	47
3.1. Фильтр Винера–Колмогорова .....	—
3.2. Фильтр Калмана–Бьюси .....	53
<b>4. Методы стохастической аппроксимации и случайного поиска</b> .....	61
4.1. Поиск корня неизвестной функции. Алгоритм Роббинса–Монро .....	62
4.2. Минимизация функционала среднего риска .....	65
4.3. Процедура Кифера–Вольфовица .....	67
4.4. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации .....	68
4.5. Пассивная стохастическая аппроксимация .....	72
4.6. Модификации алгоритмов стохастической аппроксимации .....	73
4.7. Алгоритмы случайного поиска .....	80
<b>5. Элементы теории оценивания</b> .....	83
5.1. Метод эмпирического функционала .....	—
5.2. Байесовские оценки .....	85
5.3. Метод максимального правдоподобия .....	89
5.4. Достижимая точность оценивания .....	93

<b>6.</b>	<b>Оценивание при ограниченных помехах . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1.	Случайный сигнал, наблюдаемый на фоне ограниченных помех . . . . .	—
6.2.	Метод рекуррентных целевых неравенств. Конечно-сходящиеся алгоритмы . . . . .	98
6.3.	Алгоритм "Полоска" . . . . .	102
6.4.	Метод эллипсоидов . . . . .	104
<b>Приложение. Некоторые необходимые математические сведения . . . . .</b>		<b>107</b>
<b>П.1. Теория вероятностей . . . . .</b>		<b>—</b>
П.1.1.	Случайные величины . . . . .	—
П.1.2.	Некоторые неравенства для случайных величин . . . . .	109
П.1.3.	Закон больших чисел для независимых случайных величин . . . . .	110
П.1.4.	Стационарные случайные процессы . . . . .	111
П.1.5.	Последовательности случайных величин, близкие к супер-мартингалам . . . . .	113
<b>П.2. Некоторые матричные соотношения . . . . .</b>		<b>115</b>
<b>П.3. Факторизация матричных функций . . . . .</b>		<b>—</b>
<b>П.4. Сходимость рекуррентных алгоритмов . . . . .</b>		<b>116</b>
П.4.1.	Линейный случай . . . . .	—
П.4.2.	Метод стохастической функции Ляпунова . . . . .	118
<b>Терминологический указатель . . . . .</b>		<b>121</b>
<b>Указатель литературы . . . . .</b>		<b>123</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Точное решение любой проблемы возможно при точной постановке задачи, но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно математически строго описать многие явления. Типичным подходом в теории является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в нее различных *помех*, относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой, характеризующих неконтролируемые внешние возмущения объекта или системы. Для всех математических моделей результатом эксперимента является математический объект — число, множество чисел, кривая и т.п. В математическом аспекте значительный круг прикладных задач имеет своей целью восстановление по экспериментальным данным характеристик (параметров) объекта. При этом реальные системы редко исчерпывающе описываются ограниченными математическими моделями. При выборе модели для решения реальной задачи принято говорить о *систематической* погрешности (погрешности модели), которая может быть количественно выражена расстоянием от реального оператора до выбранной модели. Другой тип погрешностей (ошибок), с которыми может столкнуться экспериментатор, связан с ошибками измерения. Такие ошибки называют *статистической* погрешностью (случайной погрешностью). Процесс выбора характеристик (параметров) модели из заданного класса для наилучшего описания результатов представляет собой одно из довольно общих определе-

ний понятия *оценивания*. На практике процесс оценивания часто удается связать с какой-нибудь количественной характеристикой качества оценивания и при выборе оценок естественно стараться минимизировать отрицательное влияние погрешностей: как статистической, так, по возможности, и систематической.

Во многих задачах погрешности удобно интерпретировать как помехи (ошибки) наблюдения (измерения результатов эксперимента). При разработке алгоритмов оценивания в большинстве математических исследований последних 50 лет помехам в измерениях или ошибкам в описании свойств модели приписываются какие-либо полезные статистические характеристики. На их основе теоретически исследуются свойства оценок. Наиболее часто предполагается, например, центрированность помех. В инженерной практике широко используются алгоритмы, основанные на идеях обычного метода наименьших квадратов (МНК), представляющего собой усреднение данных наблюдения. Если при этом предположение о центрированности помех было сделано без достаточных обоснований, то практическое использование алгоритмов такого типа нецелесообразно. Так обстоят дела, например, в условиях возможного противодействия "противника". В частности, если помеха определяется детерминированной (неслучайной) неизвестной функцией (противник глушит сигнал) или помехи измерения — зависимая случайная последовательность, то применение к наблюдениям операции усреднения никакой полезной информации не дает. Обычно в такой ситуации последовательность наблюдений называют *вырожденной* и вопрос о получении "хорошего" решения задачи не рассматривают. Эти трудности в использовании стандартных методов стохастической оптимизации приводят к необходимости исследовать алгоритмы, обеспечивающие высокое качество оценивания при минимальных предположениях о статистических свойствах помех.

Теория оценивания тесно переплетается с теорией оптимизации. Иногда даже трудно провести между ними четкую границу. Наиболее часто проблемы теории оценивания и оптимизации математически формализуются в виде задачи о поиске для некоторой функции  $f(\cdot)$  из  $\mathbb{R}^r$  в  $\mathbb{R}$  одного из ее корней (элемента из области задания функции, отвечающего нулевому значению:  $f = 0$ ) либо элемента из области задания, минимизирующего (максимизирующего) ее значение:  $\min f$  или  $\nabla f = 0$ . В литературе и приложениях эту функцию называют по-разному. Чаще других используются следующие названия: функция потерь, целевая функция, функционал качества, функционал среднего риска. В статистике ее принято называть функцией регрессии. В пособии в зависимости от контекста будет использовано то или другое из этих понятий. Аргумент функции, относительно которого ставится задача, обычно называют вектором регулируемых или оцениваемых параметров. Без потери общности будем рассматривать задачи оптимизации в контексте минимизации, так как случай максимизации легко к нему преобразуется, изменяя знак функции потерь. Под алгоритмом оценивания или оптимизации будем понимать процедуру пошагового (последовательного) изменения регулируемых параметров от некоторого начального значения (или множества значений) до значения, оптимизирующего функцию потерь, т.е. мы рассматриваем рекуррентные (итеративные) методы. Для стохастического процесса оптимизации, получающего входную информацию с помехами, типичным является тот факт, что соответствующая последовательность значений функции потерь может не убывать равномерно, а иногда — временно увеличиваться.

Обычно при классификации рекуррентных стохастических алгоритмов оценивания или оптимизации их условно разделяют на две группы. Одна группа алгоритмов базируется на прямых измерениях (или вычислениях) значений градиента функции потерь при различных оптимизируемых парамет-

рах, другая — на аппроксимациях градиента, вычисляемых на основании измерений значений функции потерь, вообще говоря, с помехами. Прототипами первой группы алгоритмов являются процедура Роббинса–Монро (РМ), которую можно рассматривать как обобщение известного градиентного метода, метод скоростного градиента, обратный метод для нейронных сетей и метод вычисления градиента функции потерь для систем реального времени, основанный на анализе бесконечно малых возмущений. Среди алгоритмов второго типа классическими будут конечно-разностный метод стохастической аппроксимации Кифера–Вольфовица (КВ) и метод случайного поиска.

Основной недостаток алгоритмов первого типа — то, что на практике в них используются вместо точных значений градиента некоторые приближения, так как данные измерений, вообще говоря, не всегда точно соотносятся с реальными характеристиками исследуемой системы. Кроме случая модели линейной регрессии, сходимость алгоритмов этого типа обычно удается доказать только при известных статистических свойствах помех в измерении текущих значений вектор-градиента и стандартных предположениях об их центрированности и некоррелированности. Напротив, подходы, основанные на аппроксимации градиента, требуют только преобразования основных измерений на выходе к значениям скачка функции потерь, что не требует полного знания отношений между входами и выходами системы. В настоящее время заметен рост заинтересованности практиков в такого рода рекуррентных алгоритмах оптимизации. Это мотивируется проблемами, возникающими при конструировании систем, работающих в реальном времени и реагирующих на сложные последовательные запросы, при синтезе адаптивных систем управления, при оптимизации вычислительных процессов с большими объемами моделирования по методу Монте–Карло, при процессе обучения нейронных сетей, в задачах статистической



идентификации сложных систем, распознавания изображений (образов), получаемых с помехами от сенсорных датчиков. Стоит еще раз подчеркнуть: главное преимущество такого типа алгоритмов заключается в том, что они не требуют детальных знаний функциональных отношений между настраиваемыми параметрами и значением функции потерь, которые необходимы в алгоритмах первого типа, основанных на использовании точного значения величины градиента. Такие отношения при решении некоторых задач зачастую трудно получить (например, при конструировании нелинейного регулятора обратной связи), а в других задачах (таких, как оптимизация по Монте–Карло или рекуррентная статистическая оценка параметров) при более или менее известных свойствах этих отношений возникают большие трудности при вычислении градиента, связанные с необходимостью многократно находить значения функции потерь.

Из-за существенных различий в типе используемой информации трудно выбрать эффективный метод сравнения качества работы алгоритмов первого и второго типов. Обычно алгоритмы, основанные на измерении градиента, быстрее сходятся к оптимальным значениям параметров. Интуитивно этот результат не удивляет, так как такие алгоритмы используют более содержательную дополнительную информацию о градиенте функции потерь. На основании теоретических исследований асимптотического поведения отклонения вектора оценок от оптимального для алгоритмов первого типа часто получают скорость сходимости, пропорциональную обратной величине квадратного корня из количества итераций. При построении алгоритмов второго типа почти ту же скорость сходимости достигают только в специальных случаях. Помимо асимптотической оценки количества итераций на практике для сравнения алгоритмов анализируют и другие факторы, учет которых нередко отдает предпочтение алгоритмам второго типа. К таким факторам относятся следующие:

- Невозможность иногда получить достоверные сведения о системных отношениях входа–выхода. Если сведения о системной модели недоступны, ненадежны или используется недостаточная системная модель, то алгоритмы первого типа не осуществимы на практике.

- Общая стоимость скорости сходимости, которую нужно учитывать, зависит не только от требуемого числа итераций, но также и от затрат, необходимых для выполнения одной итерации. Эти затраты для алгоритмов, использующих точные значения градиентов, часто включают в себя большой объем вычислений, дополнительные человеческие усилия, необходимые для определения и кодирования градиентов, а также материальные затраты (при необходимости) на разработку модели и проведение экспериментов: трудозатраты, материалы, топливо и т.п.

- Асимптотические оценки скорости сходимости не всегда представительны при конечных выборках.

**Исторический обзор.** Остановимся несколько подробнее на перечислении этапов и знаменательных вех в развитии теории стохастической оптимизации и оценивания. Теория оценивания начала формироваться как математическая наука в 1806 г., когда появилась работа А. Лежандра о наименьших квадратах. Честь основателя принадлежит и К. Гауссу, опубликовавшему в 1809 г. свою версию метода наименьших квадратов (МНК). В 1821 г. он предложил рекуррентный вариант процедуры, позволяющий корректировать ранее вычисленную оценку с учетом вновь поступивших дополнительных измерений без необходимости повтора всех предшествующих вычислений. В этот период стимулом развития МНК служили запросы развития небесной механики, и метод быстро стал стандартным для определения орбит небесных тел. Неудивительно, что в ряду авторов работ по небесной механике стоят имена Ф. Бесселя, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, С. Пуассона, известных своим вкладом в основания статистики.

В начале XX века теоретические обоснования метода наименьших квадратов получили значительное развитие в трудах А.А. Маркова [24]. Постепенно методика оценивания была поглощена статистикой, но не сразу в достаточно строгой математической форме. Лишь в середине XX века теория вероятностей и важнейшие разделы статистики получили соответствующее математическое оформление, прежде всего благодаря использованию концепций теории меры. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р. Фишером в 20–30-х годах прошлого века [65]. Р. Фишер предложил метод максимума правдоподобия и показал, что доставляемые им оценки не могут быть существенно улучшены. Р. Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Тщательно рассматривая основания теории оценивания, он избавил ее от жестких ограничений, существовавших с момента появления работ К. Гаусса. Обобщения его теории привели, в частности, к развитию современных методов непараметрического и робастного оценивания, в которых точная природа распределения вероятностей оцениваемых случайных величин не предполагается известной.

Одновременно с формализацией и развитием математической статистики проводились исследования в далеких, казалось бы, от них областях. До 1940 года оценивание касалось прежде всего классических проблем определения наилучших оценок параметров распределений на основе выборки из генеральной совокупности. Между тем специалисты по линиям связи имели дело с задачей синтеза устройств, позволяющих эффективно обнаруживать присутствие или отсутствие сигнала, наблюдаемого на фоне помехи. Именно их исследования составили конкуренцию статистическим исследованиям Р. Фишера. Быстрое развитие теории связи привело к необходимости учета воздействия помех на распространение и прием

сигналов. Первые попытки уменьшить нежелательное воздействие помех были связаны с введением методов расчета фильтров, позволяющих оценить спектр мощности полезного сигнала. Эти попытки делались в перспективном направлении, но их сдерживала неразвитость теории фильтрации. Математические основы этой теории только закладывались: в начале 30-х годов XX века А. Хинчин и Н. Винер создали теорию гармонического анализа случайных функций, центральное место в которой занимает теорема о спектральном представлении стационарных процессов. Основы теории оптимальной фильтрации стационарных процессов были заложены в работах А.Н. Колмогорова (1941 г. — см. [18]) и отчете Н. Винера, написанном в 1942 г. по заданию Национального Совета оборонных исследований США и опубликованном в 1949 г. — см. [78]. Н. Винер показал, в частности, что теория оценивания может быть применена для синтеза электрического фильтра, который обеспечивает наилучшее выделение сигнала при наличии стационарной помехи. Основной акцент он делал не столько на рассмотрение частотных спектров сигналов, сколько на их обработку как стохастических процессов. Центральным местом теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова является уравнение Винера–Хопфа, решение которого непосредственно связано с синтезом оптимального фильтра. Аналитические трудности решения этого уравнения (в частности, проблема факторизации) явились главным препятствием на пути широкого внедрения методов фильтрации в практику. Кроме того, значительным ограничением для многих приложений было важное предположение о стационарности обрабатываемого сигнала.

В конце 40-х годов XX века закладываются основы статистической теории связи и теории информации. В 1947 г. в докторской диссертации В.А. Котельникова "Теория потенциальной помехоустойчивости", опубликованной в 1956 г. — см. [19], впервые сформулирована задача оптимального ста-

статистического синтеза приемных устройств и дается решение задачи обнаружения и различения детерминированных сигналов на фоне коррелированной помехи. В этой работе с новых позиций анализируются многие фундаментальные понятия. Спустя немногим более года появляется широко известная работа К. Шеннона, содержащая знаменитые теоремы о кодировании передаваемых сигналов с целью устранения избыточной информации и о пропускной способности каналов со случайными помехами. Широкое признание среди инженеров-проектировщиков систем связи получила интерпретация Бодешеннона (1950 г.) процедуры синтеза оптимального фильтра [62]. В то же время Н. Винер публикует книгу "Кибернетика, или управление и связь в животном и машине", возвестившую о становлении новой науки — кибернетики, в которой информационно-управленческая связь в явлениях материального мира выступает как фундаментальное его свойство [5].

Позже теория оптимальной фильтрации обогащается байесовской идеологией. Структуру оптимального приемника-обнаружителя начали формировать на основании анализа отношения правдоподобия и при определенных условиях научились получать согласованный фильтр, максимизирующий отношение сигнал/шум на входе решающего устройства. Наряду с проблемой обнаружения на первый план в статистической теории связи выдвигаются проблемы различения сигналов и восстановления сообщений. Эти проблемы оказались тесно связанными с оценкой параметров, от которых могут зависеть принимаемые сигналы. Так, например, проектировщики радиолокатора уже не удовлетворяются решением только проблемы детектирования сигнала. Для них важно получить дополнительную информацию об амплитуде и фазе принятых радиолокатором сигналов. Хотя первоначально преобразование сигналов и оценивание их параметров изучалось со специальными целями, вскоре было установлено, что эти проблемы естественно укладываются в рамки статистики.

В конце 50-х годов XX века при исследовании оптимальных фильтров, синтезируемых для обработки результатов наблюдения на конечном интервале времени, были предложены подходы, не использующие интегральное уравнение Винера–Хопфа. Р. Калман и Р. Бьюси [16] поняли, что вместо его исследования часто бывает желательно (и возможно) превратить интегральное уравнение в нелинейное дифференциальное, решение которого дает ковариацию ошибки оптимального фильтра. В свою очередь, эта ковариация содержит всю необходимую информацию для проектирования. Этот подход, по существу представляющий собой рекуррентный вариант МНК, в частных случаях исследовался ранее и другими авторами, но именно с работ Р. Калмана и Р. Бьюси в начале 60-х годов XX века началось широкое развитие методов теории рекуррентного (последовательного) оценивания, в рамках которой задача оптимальной фильтрации получила существенное продвижение. Возможность синтеза оптимального фильтра рекуррентным способом представляет и большой практический интерес в связи с удобством его реализации на базе современной вычислительной техники. Рекуррентные процедуры оценивания (фильтр Калмана–Бьюси) оказались применимыми и в случае нестационарных процессов.

Работы Р. Калмана по рекуррентному оцениванию появились в связи с необходимостью оптимального оценивания вектора состояния линейных нестационарных систем. Оценивание производилось по наблюдениям за зашумленной компонентой вектора состояния. При этом в теоретическом плане существенным моментом является линейная зависимость наблюдаемого процесса от оцениваемого параметра (линейная фильтрация). Вместе с тем, многие практические задачи приводят к нелинейной зависимости данных наблюдения от оцениваемого параметра. Этот раздел теории оценивания — нелинейная фильтрация — развит значительно меньше, основные идеи были выдвинуты в 1960 г. Р.Л. Стратоновичем [41]. Предло-

женная им рекуррентная процедура оценивания в линейном случае преобразуется в фильтр Калмана–Бьюси. Позднее результаты теории Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации и теории Калмана–Бьюси рекуррентной фильтрации стали широко использоваться в теории оптимального управления, в частности в задачах линейно-квадратичной оптимизации при неполных и зашумленных наблюдениях за вектором состояний объекта управления. В конце XX века В.Н. Фомину [47, 48] удалось существенно обобщить классические исследования в этой области, развивая *операторный подход к решению задач линейной фильтрации*.

Теория оценивания в последней четверти прошлого века получила дополнительный импульс в развитии при синтезе адаптивных систем, способных успешно функционировать в условиях априорной неопределенности о свойствах внешней среды. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но ее можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то можно синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А.А. Фельдбаума [43], утверждавшего, что "управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими". При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства либо близкие к ним. Такие системы называют *адаптивными*, поскольку в процессе функционирования они проявляют свойство приспособляемости к заранее неизвестным помехо-сигнальным условиям (см. [27, 40, 44, 46, 49]). Сказанное в равной степени относится и к другим адаптивным устройст-

вам, в частности к обучающимся машинам и адаптивным фильтрам (см., например, [27, 45, 48, 54]). В последнее время большое внимание уделяется вопросам робастной устойчивости систем управления [37, 77]. При синтезе таких устройств теория оценивания играет важную роль, предоставляя рекуррентные алгоритмы адаптации.

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие и на классические разделы математической статистики, стимулируя разработку и давая приоритет рекуррентным схемам оценивания. Так получили широкое признание процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро (1951 г.) [73] и Кифера–Вольфовица (1952 г.) [68]. Большую роль в пропаганде подобных методов сыграл Я.З. Цыпкин. В своих книгах "Адаптация и обучение в автоматических системах" [49] и "Основы теории обучающихся систем" [50] он показал широкую применимость рекуррентных стохастических алгоритмов в задачах оценивания, идентификации, распознавания образов, оптимизации, управления. Позже в работах [29, 32, 33, 51, 52] была оценена эффективность таких алгоритмов и найдены их оптимальные и робастные варианты. Своеобразной современной энциклопедией по стохастической аппроксимации и ее применениям может служить книга Г. Кушнера и Г. Ина [69]. Рост производительности вычислительных машин и усложнение решаемых практических задач привели ко все более широкому использованию обучающихся систем, в частности нейронных сетей с большим количеством узлов. Оказалось, что и при настройке их параметров теории оценивания и оптимизации на современном уровне предоставляют в распоряжение разработчиков удобные алгоритмы.

На практике широко используются алгоритмы типа случайного поиска. Это вызвано потребностью в решении задач оптимизации в условиях, когда свойства исследуемой функции потерь неизвестны, а измерения значений самой функции доступны чаще всего с помехами. В русскоязычной литературе



эти алгоритмы исследовались, например, в работах Л.А. Расстригина [38, 39], А. Жилинскаса [15], С.М. Ермакова и А.А. Жиглявского [13] при условии центрированности и независимости помех наблюдения. Вообще говоря, в условиях, когда информации о функции потерь мало, для поиска точки минимума надо последовательно перебрать все возможные варианты векторов регулируемых параметров. При высокой размерности задачи это сделать за разумное время невозможно. На основании тех или иных предположений о свойствах функции потерь использование алгоритмов случайного поиска позволяет заменить полный перебор на, в некотором смысле, здравое блуждание в множестве регулируемых параметров.

К настоящему времени методика исследования свойств оценок, доставляемых рекуррентными алгоритмами оценивания и оптимизации при зашумленных наблюдениях, приобрела в целом достаточно законченный вид. Основой многих работ по оптимизации сходимости алгоритмов являются работы М. Вазана [3], В.Я. Катковника [17], М.Б. Невельсона и Р.З. Хасьминского [28], Б.Т. Поляка [9, 28–35] и других авторов. При коррелированных статистических помехах в работах Л. Льюнга и Г. Кушнера с соавторами (см., например, [23, 69]) на основе исследования характеристик слабой сходимости разработана методика анализа асимптотических свойств оценок рекуррентных алгоритмов, опирающаяся на изучение устойчивости решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Асимптотические свойства предельных распределений ошибок оценивания алгоритмов стохастической аппроксимации часто исследуются на основе работы В. Фабиана [64]. Стохастические квазиградиентные алгоритмы для решения задач невыпуклой оптимизации рассматривались Ю.М. Ермольевым, А.М. Гупалом, С.П. Урясьевым и др. [14, 25, 42]. При нерегулярных помехах в наблюдении (например, ограниченных, а в остальном произвольных)

в книгах В.Н. Фомина, А.Л. Фрадкова, В.А. Якубовича [44], А.Б. Куржанского [21] и Ф.Л. Черноусько [53] используются методы получения гарантированных множеств, содержащих оцениваемые параметры. Систематическое параллельное изложение методов оценивания при статистических и нерегулярных помехах проведено Ф. Швеппе [75]. Другие способы описания свойств неопределенностей обсуждаются П.Е. Эльясбергом в книге [57]. Таково современное состояние в области стохастической оптимизации и оценивания.

Характер изложения материала в данном учебном пособии в существенной степени следует известной монографии В.Н. Фомина "Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация" [45].

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В тексте пособия приняты следующие обозначения:

$n$  — дискретное время

$i, j, k, l, m, p, N$  — целые числа (обычно неотрицательные)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \rho, x, C$  — скалярные величины

$a, b, \varphi, w, X$  — векторные или скалярные величины

$y, Y$  — наблюдаемые скалярные и векторные переменные

$v$  — помехи (шумы) в наблюдениях (измерениях)

$\zeta, \eta$  — случайные векторы

$A, B, D, \Phi, \Gamma, H, K, Q, R$  — матрицы,  $I$  — единичная матрица

$\{\alpha_n\}, \{X_n\}$  и  $\{A_n\}$  — последовательности чисел, векторов и матриц

$\cdot^T$  — операция транспонирования вектора или матрицы

$B > 0$  ( $B \geq 0$ ) — матрица  $B$  — симметричная и положительно (неотрицательно) определенная:  $B = B^T, a^T B a > 0$  ( $a^T B a \geq 0$ )  $\forall a$

$\text{Tr}[B]$  — след матрицы  $B$  (сумма диагональных элементов)

$\|\cdot\|$  — евклидова норма: для вектора  $\|a\| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$  или для матрицы

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$f(\cdot), F(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot), Q(\cdot, \cdot), q(\cdot), K(\cdot)$  — вещественные функции

$L(\cdot, \cdot)$  — функция правдоподобия

$g(\cdot), G(\cdot, \cdot)$  — векторные функции

$f'(\cdot), \nabla f(\cdot)$  — вектор-градиент функции  $f(\cdot)$

$\mathcal{O}(\cdot)$  — функция такого же порядка малости, как и ее аргумент

$o(\cdot)$  — функция более высокого порядка малости, чем ее аргумент

$\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел

$r$  — размерность вектора оцениваемых параметров

$\theta$  — оцениваемое (оптимальное) значение

$\hat{\theta}$  — вектор (иногда матрица) в пространстве оцениваемых параметров (оценка)

$\Delta_n$  — вектор пробного одновременного возмущения в  $n$ -й момент времени

$\Theta$  — множество в пространстве параметров

$\text{diam}(\Theta)$  — наибольшее из расстояний между двумя произвольными точками множества  $\Theta$

$\mathcal{P}_{\{\cdot\}}(\cdot)$  — функция (оператор) проектирования на множество

$\Omega$  — вероятностное пространство

$\omega$  — элемент вероятностного пространства

$\mathbf{P}\{\cdot\}$  — вероятность события

$P(\cdot)$  — функция распределения вероятностей

$\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$  — нормальное распределение случайной величины

$E\{\cdot\}$  — знак математического ожидания

$E\{\cdot|\cdot\}, E_w\{\cdot\}$  — условное математическое ожидание

$M_\varphi$  — среднее значение случайной величины  $\varphi$  (или его верхняя граница)

$\sigma_v^2$  — дисперсия случайной величины  $v$  (или ее верхняя граница)

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера:  $\delta_{ii} = 1$  и  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$

$\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака ( $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$ )

$\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$  — характеристическая функция множества (функция Хевисайда), равная нулю или единице

$\text{sgn}\{\cdot\}$  — знаковая функция, равная плюс/минус единице

$\forall$  — квантор "для всякого"

# Методы оценивания и оптимизации

---

Изложение материала пособия мы начнем с формулировки нескольких модельных примеров, иллюстрирующих область применения обсуждаемых методов.

## 1. Примеры задач оценивания

Рассматриваемые примеры не представляют собой конкретные практические задачи. Многие из них заданы в достаточно общей модельной форме, но, по мнению автора, для практиков не составит труда при необходимости конкретизировать любой из них.

### 1.1. Оценивание величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи

Предположим, что наблюдаемый (регистрируемый измерительным прибором) сигнал  $\{y_n\}$  имеет вид

$$y_n = \theta + v_n,$$

здесь  $\theta$  — неизвестная постоянная величина (*полезный сигнал*);  $\{v_n\}$  — неизвестная помеха наблюдения, изменяющаяся во времени,  $n = 1, 2, \dots$ . Интервал времени наблюдения может быть либо неограниченным, либо конечным. При рассмотрении второго случая мы будем писать:  $n = 1, 2, \dots, N$ .

*Требуется* по набору величин  $y_1, \dots, y_N$ , состоящему из наблюдений, полученных к моменту времени  $N$ , оценить значение величины  $\theta$ .

В такой общей постановке нет возможности получить какое-нибудь удовлетворительное решение задачи. Для большей содержательности в постановку задачи вносят уточняющие дополнения. Например, при статистическом подходе делают те или иные предположения о вероятностных свойствах помех  $\{v_n\}$ . Достаточно характерным является предположение о *центрированности* (среднее значение равно нулю) и *независимости* (в упрощенном смысле, нет зависимости между значениями в разные моменты времени) помехи. В этой ситуации, просуммировав и усреднив  $N$  значений наблюдений, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n = \theta + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n.$$

В зависимости от сделанных статистических предположений в силу закона больших чисел (см. разд. П.1.3) величины  $\sum_{n=1}^N v_n/N$  могут сходиться в некотором вероятностном смысле к нулю. Тогда оценки  $\{\hat{\theta}_N\}$  неизвестного значения  $\theta$ , вычисленные по формуле

$$\hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n,$$

будут сходиться в том же вероятностном смысле к значению неизвестной величины  $\theta$ .

С практической точки зрения для удобства реализации алгоритма оценивания на ЭВМ его целесообразно переписать в рекуррентной форме, использующей на каждом шаге *конечную память* (фиксированное количество значений). Пусть  $\hat{\theta}_0 = 0$ . Произведя несложные преобразования:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{n} y_n,$$

получим рекуррентный вариант алгоритма для вычисления оценок:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{1}{n} (\hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

Обратим внимание на то, что для вычисления очередной оценки используется только новое наблюдение и предыдущая оценка.

Кроме вычисления среднеарифметического значения данных наблюдения широко используется метод максимального правдоподобия. Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда помехи — случайные величины, вектор наблюдений  $Y$  имеет случайную природу. Если существует плотность у его функции распределения, то ее обычно называют *функцией правдоподобия* и обозначают  $L(Y, \theta)$ , подчеркивая зависимость от  $\theta$ . В такой ситуации одним из естественных способов выбора оценки является определение той точки, в которой функция правдоподобия достигает максимального значения. Например, пусть помехи наблюдения — независимые гауссовские с нулевым средним и невырожденной дисперсией  $\sigma_n^2 > 0$ :  $v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Так как  $y_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_n^2)$ , то в этом примере функция правдоподобия имеет вид

$$L(Y, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \prod_{k=1}^N \sigma_k} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \theta)^2}{2\sigma_k^2}}.$$

Удобнее решать задачу максимизации по  $\theta$  функции

$$\ln L(Y, \theta) = -\frac{N \ln 2\pi}{2} - \sum_{k=1}^N \ln \sigma_k - \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \theta)^2}{2\sigma_k^2}$$

(*логарифма правдоподобия*). Приравнивая к нулю результат дифференцирования по  $\theta$ , получаем уравнение для  $\hat{\theta}_N$ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{y_k - \hat{\theta}_N}{\sigma_k^2} = 0,$$

решением которого является оценка, называемая *усреднением с весами*:

$$\hat{\theta}_N = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \sigma_k^{-2}}{\sum_{k=1}^N \sigma_k^{-2}}.$$

Последняя формула легко обосновывается и на интуитивном уровне: в формирование оценки наибольший вклад вносят те наблюдения, которые делались с наименьшими ошибками. Если дополнительно предположить одинаковую распределенность помех наблюдений  $\{v_n\}$ , то, как и выше, получаем среднеарифметическое значение данных наблюдения:

$$\hat{\theta}_N = \frac{\sigma_v^{-2} \sum_{k=1}^N y_k}{N \sigma_v^{-2}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n.$$

Для решения поставленной задачи можно выбрать и какой-нибудь другой способ построения оценок искомой величины  $\theta$ , но все известные содержательные алгоритмы опираются на существенные предположения о статистических свойствах помех наблюдения. Обычно, как и в рассмотренном примере, предполагаются их центрированность и некоррелированность. Далее, в разд. 5, разбираются еще несколько примеров такого же типа. Интересна постановка задачи о выборе наилучших в том или ином смысле оценок. Известно, что приведенный первым алгоритм является оптимальным в случае независимых одинаково распределенных гауссовских помех в наблюдениях. Для распределений статистических помех других типов оптимальным может быть иной метод построения оценок. При исследовании выбранного алгоритма стараются дополнительно получить ответ на вопрос о скорости сходимости доставляемых им оценок, если они сходятся к значению неизвестной величины  $\theta$ , т.е. изучают скорость сходимости к нулю последовательности  $\{\hat{\theta}_N - \theta\}$ .

К сожалению, при произвольных помехах в наблюдении приведенные рассуждения не позволяют получить удовлетво-



рительного решения задачи. Хорошо оценить величину постоянного сигнала на фоне детерминированной (неслучайной) неизвестной помехи принципиально невозможно.

## 1.2. Задача об обнаружении сигнала

Рассмотрим задачу обнаружения (детектирования) сигнала  $\{\varphi_n\}$ , который может попадать, а может и не попадать в зашумленный канал наблюдения (измерения производятся с помехами). Здесь для простоты будем считать сигнал  $\{\varphi_n\}$  скалярным. В задачах обнаружения сигнала оцениваемая величина  $\theta$  обычно принимает конечное число значений и часто представляет собой характеристику типа "да — нет". Будем считать, что случай  $\{\theta = 1\}$  соответствует наличию сигнала в приемнике, а случай  $\{\theta = 0\}$  — его отсутствию. С учетом этого для наблюдаемых величин  $\{y_n\}$  можно записать соотношения

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . В историческом аспекте эта задача является классической. Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на ней, поэтому набор возможных способов ее решения при различных предположениях о статистических свойствах сигнала  $\{\varphi_n\}$  и "хороших" помехах  $\{v_n\}$  достаточно обширен (см., например, [45]).

При решении важно знать: известны значения величин  $\{\varphi_n\}$  в каждый момент времени или нет. Будем рассматривать случай, когда в каждый момент времени  $n$  значение обнаруживаемого сигнала известно. Помимо этого пусть полезный сигнал — ограниченный и имеет статистическую природу, представляя собой последовательность независимых между собой случайных величин с известным ненулевым средним значением  $M_\varphi \neq 0$  и положительной ограниченной дисперсией  $\sigma_\varphi^2 > 0$ . Как и ранее, просуммировав и усреднив  $n$  последова-

тельных данных наблюдения, для среднеарифметического значения данных наблюдения получим

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел (см. разд. П.1.3), последовательность величин  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k$  стремится к среднему значению  $M_\varphi$ . Если взять  $\hat{\theta}_0 = 0$  и в качестве очередной оценки выбрать

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{nM_\varphi} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то, предполагая независимость помех наблюдения, их одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  к значению

$$\theta + \frac{M_v}{M_\varphi},$$

здесь  $M_v$  — среднее значение помехи. В момент времени  $n$  при выборе гипотезы о наличии полезного сигнала в канале наблюдения или об его отсутствии разумно взять операцию сравнения величины текущей оценки  $\hat{\theta}_n$  с некоторым *пороговым значением*  $\delta$ . Если  $\hat{\theta}_n < \delta$ , то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*. При известной величине  $M_v$  естественно в *решающем правиле* задать пороговое значение  $\delta = \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_\varphi}$ .

При произвольных помехах в наблюдении этот простой алгоритм не годится. Даже если помехи — случайные, независимые, одинаково распределенные, но с неизвестным средним значением, то при  $|\frac{M_v}{M_\varphi}| > \frac{1}{2}$  рассмотренный алгоритм в пределе будет давать неправильные ответы. Как все-таки подступиться к решению такой задачи? Пусть помехи задаются неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией

$|v_n| \leq C_v$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Обозначим через  $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , центрированные входы. Предположим дополнительно ограниченность четвертого центрального момента полезного сигнала:  $E\{|\Delta_n|^4\} < \infty$ . Домножим на  $\Delta_n$  обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины  $y_n$ , и, произведя несложные преобразования, получим при  $n = 1, 2, \dots$

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta + \Delta_n M_\varphi \theta + \Delta_n v_n.$$

Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k M_\varphi \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k,$$

$n = 1, 2, \dots$ . Первое и второе слагаемые в правой части при  $n \rightarrow \infty$  и сделанных предположениях, в силу усиленного закона больших чисел (см. разд. П.1.3), с вероятностью единица стремятся к  $\sigma_\varphi^2 \theta$  и нулю соответственно. Последнее слагаемое с вероятностью единица стремится к нулю<sup>1</sup>. Отсюда следует,

---

<sup>1</sup>Доказательство этого факта сложнее. Покажем, что с вероятностью единица при достаточно больших  $n$  последнее слагаемое по абсолютной величине не будет превосходить любое заранее выбранное малое число  $\varepsilon > 0$ , т.е. при  $n \rightarrow \infty$  оно будет стремиться к нулю. Пусть  $h = \frac{\varepsilon}{2\sigma_\varphi(1+\varepsilon)}$ . По предположению, возможные значения помехи  $v_n$  лежат в интервале  $[-C_v, C_v]$ . Разобьем его на  $l = [2C_v/h] + 1$  частей  $\mathcal{V}_i = [\bar{v}_{i-1}, \bar{v}_i)$ ,  $\bar{v}_0 = -C_v$ ,  $\bar{v}_i = -C_v + ih$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Обозначим  $\epsilon_n = \sum_{i=1}^l \mathbf{1}_{\{v_n \in \mathcal{V}_i\}} (v_n - \bar{v}_i)$ ,  $n \geq 1$ . Заметим, что  $|\epsilon_n| \leq h$ . Так как число  $l$  фиксировано, то, в силу усиленного закона больших чисел, при  $i = 1, \dots, l$  и достаточно больших  $n$  с вероятностью единица

$$\left| \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1+\varepsilon)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \leq \sigma_\varphi^2 (1+\varepsilon)^2.$$

При этом в силу неравенства Гёльдера (см. разд. П.1.2) получаем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k \right| = \left| \sum_{i=1}^l \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k \epsilon_k \right| \leq \frac{l\varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1+\varepsilon)} + \sigma_\varphi (1+\varepsilon) h \leq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

что при  $\Delta_1 \neq 0$  последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , формируемых по правилу

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2},$$

сходится с вероятностью единица к  $\theta$ . Зададим некоторое пороговое значение  $\delta \in (0, 1)$ , например  $\delta = 1/2$ . В качестве решающего правила в момент времени  $n$  можно выбрать операцию сравнения величины текущей оценки  $\hat{\theta}_n$  с выбранным пороговым значением  $\delta$ . Если  $\hat{\theta}_n < \delta$ , то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*.

### 1.3. Рандомизированные алгоритмы

Остановимся подробнее на последнем способе построения оценок из предыдущего пункта. Из его вида следует, что если при  $n = 1, 2, \dots$  обозначить

$$\Gamma_n = \left( \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \right)^{-1},$$

то две последовательные оценки связаны соотношением

$$\frac{\hat{\theta}_n}{\Gamma_n} = \frac{\hat{\theta}_{n-1}}{\Gamma_{n-1}} + \Delta_n y_n.$$

Следовательно, при выборе  $\hat{\theta}_0 = 0$  рассматриваемый алгоритм может быть записан в рекуррентной форме:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \Gamma_n (\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n),$$

$$\Gamma_n = (\Gamma_{n-1}^{-1} + \Delta_n^2)^{-1}.$$

Напомним, что при сделанных предположениях  $\Delta_n$  — независимые центрированные случайные величины. Обозначив

через  $\bar{y}_n = \Gamma_n(\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n)$  величины, вычисляемые по наблюдаемым к моменту времени  $n$  данным, полученный рекуррентный алгоритм оценивания можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n.$$

Для примера из разд. 1.2 было приведено интуитивное обоснование сходимости последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  к истинному значению неизвестного параметра при неслучайной неизвестной, но ограниченной последовательности помех в наблюдении. Как ни странно, долгое время исследователи не замечали того факта, что в случае зашумленных наблюдений оценки алгоритма поиска с последовательным ( $n = 1, 2, \dots$ ) изменением  $\hat{\theta}_{n-1}$  в направлении по оси некоторого случайного центрированного вектора  $\Delta_n$  могут сходиться к истинному вектору регулируемых параметров  $\theta$  не только при "хороших" помехах, но и при почти произвольных. Это достигается в условиях, когда наблюдения  $\bar{y}_n$  производятся в некоторой точке, определяемой предыдущей оценкой  $\hat{\theta}_{n-1}$  и вектором  $\Delta_n$ , называемым *пробным одновременным возмущением*. Алгоритмы такого типа в дальнейшем будем называть *рандомизированными*, так как обоснование их сходимости при "почти произвольных" помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного одновременного возмущения.

#### 1.4. Функционал среднего риска

Приведенные в разд. 1.1 и 1.2 примеры относятся к более широкому классу задач *минимизации функционалов среднего риска*. Пусть  $F(w, X) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  — *штрафная функция (функция потерь)* и задана последовательность  $p$ -мерных случайных векторов  $\{w_n\}$  из  $\mathbb{R}^p$ , порожденная распределением вероятностей  $P_w(\cdot)$ . Задача минимизации функционала сред-

него риска состоит в нахождении точки минимума функции  $f(\cdot)$ , имеющей вид

$$f(X) = E_w\{F(w, X)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, X)P_w(dw),$$

Функцию  $f(\cdot)$  обычно называют *функцией средних потерь*. В том случае, когда функция распределения  $P_w(\cdot)$  неизвестна, эта задача выходит за рамки классической теории оптимизации, но ее можно попытаться решить в тех случаях, когда в точках, задаваемых последовательностью  $\{(w_n, X_n)\}$ , доступны наблюдению (может быть с помехами) или значения функции  $F(w_n, X_n)$ , или величины  $\nabla_x F(w_n, X_n)$  — значения вектор-градиента. При этом обычно предполагают, что экспериментатору доступны только процессы формирования и (или) наблюдения последовательности  $\{X_n\}$ , а соответствующие значения  $\{w_n\}$  порождаются распределением  $P_w(\cdot)$  и неподконтрольны и даже, может быть, неизвестны.

Для примеров разд. 1.1 и 1.2 можно взять  $p = r = 1$ . Если помеха наблюдения  $\{v_n\}$  имеет случайную природу и ее функция распределения —  $P_v(\cdot)$ , тогда задача из разд. 1.1 об оценивании величины постоянного сигнала эквивалентна задаче минимизации функционала среднего риска:

$$f(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(\theta - X + w)^2 P_v(dw),$$

а вторая задача из разд. 1.2 связана с функционалом

$$f(X) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(\varphi(\theta - X) + v)^2 P_{\varphi, v}(dw),$$

где

$$w = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix},$$

а  $P_{\varphi, v}(\cdot)$  — функция совместного распределения полезного сигнала и помехи. Наблюдению в каждый момент времени

$n$  доступны значения  $\nabla_x F(w_n, X_n)$ , равные  $X_n - y_n$  в первом случае или  $\varphi_n(\varphi_n X_n - y_n)$  — во втором, при этом в первой задаче значения  $w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не известны полностью, а во второй — не известны полностью только вторые компоненты векторов  $w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Если измерения значений функции  $F(w_n, X_n)$  фактически делаются с некоторой аддитивной случайной центрированной независимой ошибкой  $v_n \in \mathbb{R}$ , то в силу общности поставленной задачи это усложнение не принципиально. Расширим вектор  $w$  дополнительной компонентой  $v$  и обозначив

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix},$$

можно рассматривать вместо  $F(w, X)$  новую функцию

$$\bar{F}(\bar{w}, X) = F(w, X) + v$$

со схемой наблюдения без помех и новое совместное неизвестное распределение  $P_{w,v}(\cdot)$  вместо  $P_w(\cdot)$ , которое и ранее предполагалось неизвестным. Если ошибки измерения не обладают хорошими статистическими свойствами, то упрощать задачу нельзя. Надо рассматривать модель наблюдений с помехами:

$$y_n = F(w_n, X_n) + v_n,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ .

## 1.5. Предсказание значений случайного процесса

Описание предварительных примеров закончим задачей о предсказании значений скалярного случайного процесса  $\{\theta_n\}$ , порождающегося устойчивым линейным фильтром:

$$\theta_{n+1} = a\theta_n + w_{n+1},$$

где  $|a| < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\theta_0 = 0$  и последовательность  $\{w_n\}$  представляет собой некоторую реализацию независимых случайных величин. Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta_n + v_n,$$

являющиеся смесью преобразованного процесса  $\{\theta_n\}$  и неизвестной помехи  $\{v_n\}$ . Требуется найти оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  значений процесса  $\{\theta_n\}$  в момент времени  $n + 1$  по наблюдениям  $y_i, \varphi_i, i \leq n$ . Качество предсказания определяется средней величиной квадрата невязки

$$E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы  $\{\varphi_n\}$  определяются детерминированной последовательностью. Если  $\varphi_n \equiv \varphi$ , а  $\{w_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стационарные и стационарно связанные центрированные случайные процессы (см. разд. П.1.4) с известными спектральными характеристиками, то рассматриваемая задача имеет оптимальное решение в рамках теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова. В нестационарном случае при  $\varphi_n \neq \varphi$  и независимых гауссовских случайных процессах  $\{w_n\}, \{v_n\}$  оптимальный прогноз вычисляется рекуррентно по фильтру Калмана–Бьюси. В случае произвольных помех наблюдения  $\{v_n\}$  решение задачи об оптимальном прогнозе с помощью фильтра Калмана–Бьюси и, тем более, в рамках теории Винера–Колмогорова не получается. В [9] при неизвестных, но ограниченных детерминированных помехах наблюдения  $\{v_n\}$  для решения задачи предложен новый радомизированный алгоритм, являющийся модификацией упрощенного варианта фильтра Калмана–Бьюси. При обосновании его относительной эффективности предполагается случайная природа формирования последовательности  $\{\varphi_n\}$ .



## 2. Элементы регрессионного анализа, метод наименьших квадратов

Одним из наиболее часто встречающихся вопросов, встающих перед исследователями различных специальностей, является проблема нахождения зависимости между некоторым набором величин. Эта зависимость может быть выведена из теории и (или) может быть получена на основании экспериментальных исследований. Если зависимость получена из теоретических соображений, то довольно часто ее можно приближенно представить в аналитическом виде, заданном с точностью до нескольких неизвестных параметров. Если же в основе построения зависимости лежат экспериментальные исследования, то параметрическая зависимость постулируется. В обоих случаях при построении математической модели должны использоваться определенные сведения об исследуемом объекте, на основании которых мог бы быть сделан вывод о степени точности его описания этой моделью.

### 2.1. Наилучшая аппроксимация одной случайной величины с помощью другой

Задача регрессионного анализа состоит в получении наилучшей аппроксимации (*регрессии*) одной случайной величины с помощью семейства функций от другой случайной величины. Наилучшая аппроксимация понимается в смысле наименьших квадратов.

Пусть  $\zeta$  и  $\eta$  — произвольные случайные величины (векторы), принимающие значения соответственно в  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^s$ , определенные на некотором вероятностном пространстве  $\Omega$ , и  $\mathcal{G}$  — некоторое семейство функций, отображающих  $\mathbb{R}^s$  в  $\mathbb{R}$ , заданных с точностью до конечномерного набора параметров, называемое *регрессионной моделью*.

Требуется найти функцию  $g(\cdot) \in \mathcal{G}$ , минимизирующую среднее квадратичное отклонение

$$E\{\|\zeta - g(\eta)\|^2\}.$$

Если  $\mathcal{G}$  — класс всех измеримых функций из  $\mathbb{R}^s$  в  $\mathbb{R}$ , то соответствующей минимизирующей функцией  $g(\cdot)$  является  $g(\eta) = E\{\zeta|\eta\}$  — условное (при условии  $\eta$ ) среднее случайной величины  $\zeta$ , называемое *регрессией  $\zeta$  по  $\eta$* .

Наиболее распространенной является *линейная регрессионная модель*, когда требуется найти наилучшую в среднее квадратичном смысле аппроксимацию случайной величины  $\zeta$  с помощью линейной функции от случайной величины  $\eta$ . Числовой ( $\psi$ ) и векторный ( $\Psi$ ) и коэффициенты модели линейной регрессии определяются из условия минимизации функционала

$$f(\psi, \Psi) = E\{\|\zeta - \psi - \Psi\eta\|^2\}$$

типа среднего риска из разд. 1.4, если обозначить

$$X = \begin{pmatrix} \psi \\ \Psi \end{pmatrix}.$$

Введя матрицы *ковариации*

$$B_{\zeta\eta} = \text{cov}\{\zeta, \eta\} = E\{(\zeta - E\{\zeta\})(\eta - E\{\eta\})^T\},$$

$$B_{\eta\eta} = \text{cov}\{\eta, \eta\} = E\{(\eta - E\{\eta\})(\eta - E\{\eta\})^T\}$$

и предположив, что матрица  $B_{\eta\eta}$  имеет обратную, нетрудно для оптимальных значений  $\psi$  и  $\Psi$  получить следующие формулы:

$$\psi = E\{\zeta\} - B_{\zeta\eta}B_{\eta\eta}^{-1}E\{\eta\}, \quad \Psi = B_{\zeta\eta}B_{\eta\eta}^{-1}.$$

Функция

$$g(\eta) = E\{\zeta\} + B_{\zeta\eta}B_{\eta\eta}^{-1}(\eta - E\{\eta\})$$

называется *линией регрессии*.

Понятие линейной регрессии допускает ясную геометрическую интерпретацию. Два случайных вектора  $\xi$  и  $\eta$  называются *строго ортогональными*, если их матрица ковариации равна нулю:  $\text{cov}\{\xi, \eta\} = 0$ . Так как  $\text{cov}\{g(\eta), \eta\} = \text{cov}\{\zeta, \eta\}$ , то случайные векторы  $\xi = \zeta - g(\eta)$  и  $\eta$  строго ортогональны. Следовательно, линейная регрессия соответствует строго ортогональной проекции  $\zeta$  на  $\eta$ . При случайных векторах  $\zeta$  и  $\eta$  одной размерности это совпадает с привычным геометрическим представлением об ортогональном проектировании.

Определенные понятия регрессии и линейной регрессии соотносятся примерно так же, как понятия функции и линейной функции. В теории вероятностей и математической статистике особое внимание уделяется *гауссовским случайным величинам* (см. разд. П.1.1). Это обосновано не только упрощением многих теоретических выкладок при исследовании свойств именно гауссовских случайных величин, но и важнейшим теоретическим результатом *центральной предельной теоремы* теории вероятностей, утверждающим при достаточно общих предположениях, что бесконечная сумма случайных величин с вероятностью единица стремится к некоторой гауссовской случайной величине. Одним из важных результатов регрессионного анализа является заключение о том, что если вектор, составленный из компонент случайных величин  $\zeta$  и  $\eta$ , — гауссовский, то регрессия  $E\{\zeta|\eta\}$  случайной величины  $\zeta$  по  $\eta$  совпадает с линейной регрессией. Доказательство этого факта основано на том, что строго ортогональные гауссовские величины стохастически независимы. Для гауссовских случайных величин оказывается, что условная ковариация случайной величины  $\zeta$  (при условии  $\eta$ ) не зависит от случая:

$$\text{cov}\{\zeta, \zeta|\eta\} = B_{\zeta\zeta} - B_{\zeta\eta}B_{\eta\eta}^{-1}B_{\zeta\eta}^T.$$

Для минимального значения квадратичного функционала, определяющего регрессию, из последней формулы получаем

$$E\{\|\zeta - E\{\zeta|\eta\}\|^2\} = \text{Tr}[B_{\zeta\zeta} - B_{\zeta\eta}B_{\eta\eta}^{-1}B_{\zeta\eta}^T].$$

## 2.2. Оценивание по конечному числу наблюдений

На практике бывает так, что вероятностные характеристики случайных величин  $\zeta$  и  $\eta$  известны не полностью, но зато имеются выборочные значения этих случайных величин, которые фактически представляют собой наблюдаемые значения реализаций соответствующих случайных величин. Оценка одной случайной величины с помощью выборочных значений другой также является случайной величиной, и ее качество обычно характеризуется средним значением, дисперсией и т.п. Если имеется выборочная последовательность  $d_1, d_2, \dots, d_N$  реализаций случайной величины  $\eta$ , то в рамках линейной регрессионной модели реализации  $y_1, y_2, \dots, y_N$  случайной величины  $\zeta$  удобно представить в виде

$$y_n = \varphi_n^T \theta + v_n,$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $\theta$  — вектор коэффициентов;  $\varphi_n = d_n$ , если, например, известна центрированность случайных величин  $\zeta$  и  $\eta$ , или

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} 1 \\ d_n \end{pmatrix}.$$

В этом представлении невязки  $v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , интерпретируются как ошибки наблюдения. Обозначим через

$$Y = Y_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

наблюдаемый в момент времени  $N$  вектор, являющийся функцией входных воздействий, помех в канале измерения и некоторого векторного параметра  $\theta$ .

Требуется по значению вектора  $Y$  получить хорошую оценку  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_N$  вектора  $\theta$ .

- Оценка  $\hat{\theta}$  называется *линейной*, если она имеет вид  $\hat{\theta} = \Gamma Y$  с некоторой матрицей коэффициентов  $\Gamma$ .

- Оценка  $\hat{\theta}$  называется *несмещенной*, если  $E\{\hat{\theta}\} = \theta$ .

- Последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_N\}_{N=1}^{\infty}$  называется *состоятельной*, если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\|\hat{\theta}_N - \theta\|^2 > \varepsilon\} = 0,$$

- и называется *сильносостоятельной*, если с вероятностью единица

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta.$$

Для характеристики качества оценки  $\hat{\theta}$  используется теоретически предсказываемый выбранной моделью выходной сигнал  $Z$ , т.е. выход принятой модели, который зависит от  $\hat{\theta}$ . Эта зависимость, вообще говоря, может быть выбрана разными способами. Простейшей является линейная:

$$Z = \Phi^T \hat{\theta},$$

в которой матрица  $\Phi$  состоит из векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ :

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N).$$

*Ошибку оценивания* естественно определить как  $V = Y - Z$ . Оценки  $\hat{\theta}$ , минимизирующие функционал качества (функцию потерь)

$$f_N(X) = \|V\|^2 = \sum_{n=1}^N \|y_n - \varphi_n^T X\|^2 = \sum_{n=1}^N \|v_n\|^2,$$

называются *оценками метода наименьших квадратов* (МНК). Функционал  $f_N(X)$  зависит от выборочных значений реализаций случайных величин и называется *эмпирическим*. В

ситуации использования бесконечной выборки последовательность величин  $f_N(X)/N$  может в том или ином вероятностном смысле стремиться, в силу закона больших чисел (см. разд. П.1.3), при  $N \rightarrow \infty$  к значению квадратичного функционала, определяющего линейную регрессию. В частности, если предположить независимость ошибок наблюдения и ограниченность их вторых моментов, то будет сходимость с вероятностью единица.

Несложно убедиться, что оценки МНК должны удовлетворять системе уравнений

$$\Phi\Phi^T\hat{\theta} = \Phi Y.$$

Если матрица  $\Phi\Phi^T$  — невырожденная, то эта система имеет единственное решение:

$$\hat{\theta} = (\Phi\Phi^T)^{-1}\Phi Y.$$

Можно рассмотреть более общее правило выбора оценки. Пусть  $R$  — некоторая симметричная неотрицательная матрица *весовых коэффициентов*. Введем функционал качества по правилу

$$f_N(X) = V^T R V.$$

Для линейной модели с матрицей  $\Phi$  при невырожденной (обратимой) матрице  $\Phi R \Phi^T$  оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{\theta} = (\Phi R \Phi^T)^{-1} \Phi R Y = \Gamma Y, \quad \Gamma = (\Phi R \Phi^T)^{-1} \Phi R,$$

и называется *обобщенной оценкой* МНК. При этом, если принять, что

$$Y = \Phi^T \theta + V,$$

то векторы  $\theta$  и  $\hat{\theta}$  связаны соотношением

$$\theta = \hat{\theta} - \Gamma V.$$

Последнее соотношение справедливо при любой природе ошибки оценивания. Если предположить, что условное математическое ожидание  $E\{V|\Phi\} = 0$ , то полученная оценка является несмещенной. При этом же предположении нетрудно получить формулы для условных дисперсии и матрицы ковариации оценки:

$$E\{\|\hat{\theta} - \theta\|^2|\Phi\} = \text{Tr}[\Gamma B_v \Gamma^T], \quad \text{cov}\{\hat{\theta}\hat{\theta}^T|\Phi\} = \Gamma B_v \Gamma^T,$$

где  $B_v = E\{V V^T|\Phi\}$ .

Если матрица  $B_v$  имеет обратную, то можно выбрать  $R = B_v^{-1}$ . Получаемые оценки

$$\hat{\theta} = (\Phi B_v^{-1} \Phi^T)^{-1} \Phi B_v^{-1} Y$$

называются *марковскими*. Условная ковариация марковской оценки при  $E\{V|\Phi\} = 0$  равна

$$\text{cov}(\hat{\theta}^T \hat{\theta}|\Phi) = (\Phi B_v^{-1} \Phi^T)^{-1},$$

при этом среди всех линейных оценок марковские обладают замечательным оптимальным свойством.

**Теорема** (Гаусса–Маркова). *Если  $E\{V|\Phi\} = 0$  и матрица  $B_v$  обратима, то среди всех линейных оценок вида*

$$\tilde{\theta} = (\Phi R \Phi^T)^{-1} \Phi R Y$$

*условная ковариация для марковской оценки  $\hat{\theta}$  минимальна в том смысле, что*

$$\text{cov}(\hat{\theta}^T \hat{\theta}|\Phi) \leq \text{cov}(\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}|\Phi).$$

Для доказательства теоремы можно воспользоваться матричным неравенством из разд. П.2. Подставив в него  $A = B_v^{-1/2} \Phi^T$ ,  $B^T = \Gamma B_v^{1/2}$ , получим заключение теоремы:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}|\Phi) &= \Gamma B_v \Gamma \geq \Gamma B_v^{1/2} B_v^{-1/2} \Phi^T (\Phi B_v^{-1/2} B_v^{-1/2} \Phi^T)^{-1} \times \\ &\times \Phi B_v^{-1/2} B_v^{1/2} \Gamma^T = \Gamma \Phi^T (\Phi B_v^{-1} \Phi^T)^{-1} \Phi \Gamma^T = \text{cov}(\hat{\theta}^T \hat{\theta}|\Phi). \end{aligned}$$

*Пример.* Рассмотрим задачу об оценивании неизвестного коэффициента усиления  $\theta$  известного скалярного сигнала  $\{\varphi_n\}$ , наблюдаемого на фоне помех. Пусть полезный сигнал, помехи и наблюдаемые величины при  $n = 1, 2, \dots, N$  связаны системой уравнений

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n,$$

в которой  $y_1, y_2, \dots, y_N$  — наблюдения и  $v_1, v_2, \dots, v_N$  — помехи. Предположим, что помехи  $\{v_n\}_{n=1}^N$  представляют собой реализацию стохастически независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с дисперсией  $\sigma_v^2$ :

$$E\{v_n\} = 0, \quad E\{v_n^2\} = \sigma_v^2 > 0.$$

Обозначив

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},$$

получаем

$$Y = \Phi^T \theta + V.$$

Если  $\sum_{n=1}^N \varphi_n^2 > 0$ , то оценка МНК имеет вид

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{n=1}^N \varphi_n y_n}{\sum_{n=1}^N \varphi_n^2}.$$

Марковские оценки в данном случае совпадают с оценками МНК, что является следствием некоррелированности и одинаковой распределенности случайных величин  $\{v_n\}_{n=1}^N$ . В той ситуации, когда полезный сигнал  $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$  и помехи  $\{v_n\}_{n=1}^N$  независимы, дисперсия оценки равна

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sum_{n=1}^N \varphi_n^2}.$$



Пусть  $N \rightarrow \infty$ . Если предположить, что полезный сигнал имеет статистическую природу, представляя собой реализацию независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным четвертым моментом, не зависящих от помех наблюдения:

$$E\{\varphi_n\} = M_\varphi, \quad E\{(\varphi_n - M_\varphi)^2\} = \sigma_\varphi^2 > 0,$$

$$E\{\varphi_n^4\} < \infty, \quad E\{\varphi_n v_n\} = 0,$$

то, в силу усиленного закона больших чисел (см. разд. П.1.3), можно сделать заключение о сходимости

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_n^2 \rightarrow \sigma_\varphi^2$$

с вероятностью единица. Следовательно,  $\sigma_N^2 \rightarrow 0$ , т.е. оценки МНК — сильносостоятельные.

При центрированных входных сигналах ( $M_\varphi = 0$ ) оценки МНК совпадают с предложенным в разд. 1.2, 1.3 рандомизированным алгоритмом построения оценок. Значит, в этом случае при доказательстве сильной состоятельности оценок МНК условие о центрированности и независимости помех может быть значительно ослаблено. Как и в рассмотренном примере, в литературе (см., например, [1, 13, 23, 45]) обычно изучают задачу об оценке параметров линейной регрессии при "хороших" помехах. В [7, 66] эта задача рассматривалась при *почти произвольных* помехах, для которых, среднее значение может быть не известным и отличным от нуля, или эти помехи представляют собой (может быть) реализацию коррелированного случайного процесса, или они (может быть) даже неслучайные, но ограниченные. Существенное предположение, которое сделано в этих работах, заключается в том, что регрессоры являются случайными, с известными средними значениями и независимыми от помехи. Установлены сильная состоятельность и порядок среднеквадратичной скорости сходи-

мости для оценок рандомизированных алгоритмов типа МНК и типа стохастической аппроксимации.

Кроме рассмотренной линейной регрессии часто изучают более общие модели — *скользящего среднего*:

$$y_n = \sum_{i=0}^p \varphi_{n-i}^T \theta_i + v_n,$$

*авторегрессии*:

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} = \varphi_n^T \theta_0 + v_n$$

и *авторегрессии скользящего среднего*:

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^p \varphi_{n-i}^T \theta_i + v_n$$

с помехами  $v_n$ , числовыми  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , и векторными коэффициентами  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , при  $n = 1, 2, \dots, N$ . Модель авторегрессии возникает в тех случаях, когда пытаются определить линейное уравнение, которому удовлетворяют выборочные реализации случайной величины  $\zeta$ . Модель авторегрессии скользящего среднего используется для описания поведения линейных динамических объектов управления.

### 2.3. Рекуррентные модификации метода наименьших квадратов

Рассмотрим задачу о построении оценки  $\hat{\theta}_N \in \mathbb{R}^r$ , минимизирующей определенный в предыдущем пункте эмпирический функционал качества  $f_N(X)$  при блочно-диагональной матрице весовых коэффициентов  $R$ , с блоками  $R_1, R_2, \dots, R_n$  размерностью  $m \times m$ :  $N = n m$ . Объединив в наборы по  $m$  наблюдения и в  $(r \times m)$ -матрицы соответствующие регрессоры мо-

дели, переобозначив их опять через  $y_i$  и  $\varphi_i$ , выражение для функционала качества можно переписать в виде

$$f_n(X) = \sum_{k=1}^n (\varphi_k^T X - y_k)^T R_k (\varphi_k^T X - y_k),$$

где матрицы  $\varphi_i$  и векторы  $y_i$  можно интерпретировать как данные наблюдения в момент времени  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Вектор-градиент функции  $f_n(X)$  можно вычислить как

$$\nabla f_n(X) = 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k R_k (\varphi_k^T X - y_k).$$

После второго дифференцирования получаем независящую от  $X$  матрицу-гессиан:

$$H_n = \nabla^2 f_n(X) = 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k R_k \varphi_k^T.$$

Если оценка  $\hat{\theta}_{n-1}$  обеспечивает наименьшее значение функционалу качества  $f_{n-1}(X)$ , то  $\nabla f_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) = 0$ . По формуле Тейлора для  $\nabla f_n(\hat{\theta}_n)$  имеем

$$\begin{aligned} 0 = \nabla f_n(\hat{\theta}_n) &= \nabla f_n(\hat{\theta}_{n-1}) + H_n(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}) = \nabla f_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) + \\ &+ 2\varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n) + H_n(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда, обозначив  $\Gamma_n = H_n^{-1}$ , легко выписать формулу для вычисления следующей оценки по  $\hat{\theta}_{n-1}$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

Используя матричное тождество из разд. П.2, для матриц  $\Gamma_n$  можно вывести рекуррентную формулу:

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \varphi_n (R_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_{n-1}.$$

Полученные рекуррентные соотношения для пересчета  $\hat{\theta}_n$  и  $\Gamma_n$  называются *обобщенным рекуррентным методом наименьших квадратов*.

Чтобы воспользоваться рекуррентной формой получения оценок, следует некоторым образом задать начальные значения  $\hat{\theta}_0$  и  $\Gamma_0$ . При их произвольном выборе, определяемые полученными рекуррентными формулами оценки, вообще говоря, не обязаны обеспечивать минимум соответствующим функционалам качества. При задании начальных значений естественно выбирать обратимую матрицу  $\Gamma_0$ .

Для приложений наиболее интересен случай, когда  $m = 1$ , т.е.  $y_k$  и  $R_k > 0$  — скалярные величины, а  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — векторы. Эмпирический функционал качества в этом случае имеет вид

$$f_n(X) = \sum_{k=1}^n R_k (\varphi_k^T X - y_k)^2,$$

а формулы для записи оценок обобщенного рекуррентного МНК с числовыми положительными весовыми коэффициентами записываются как

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n),$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{R_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n}.$$

Полагая  $R_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , получаем формулы обыкновенного рекуррентного МНК:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0,$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{1 + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n}, \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} I,$$

где  $\gamma_0 > 0$  — малый параметр регуляризации. Этот алгоритм — частный вид *фильтра Калмана-Бьюси* (см. разд. 3.2). В

случае независимых наблюдений и гауссовских помех он обладает оптимальными свойствами. Во многих задачах эффективно используют *модифицированный* МНК, получающийся при функционале качества с  $R_k = \gamma^{N-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0,$$

$$\Gamma_n = \gamma^{-1} \left( \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{\gamma + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n} \right), \quad \Gamma_0 = \gamma^{-1} I,$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  — *збывающий множитель*. В той ситуации, когда нельзя предполагать независимость наблюдений, в [67] при синтезе адаптивного управления стохастическим линейным объектом использовался рекуррентный МНК, соответствующий выбору весовых коэффициентов:

$$R_n = \frac{1}{\ln(\gamma^{-1} + \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^2)}.$$

Рекуррентная процедура МНК, являясь оптимальной при соответствующем выборе начальных статистик, становится практически малоприменимой, если приходится оценивать вектор параметров высокой размерности: основной объем вычислений связан с пересчетом матриц  $\Gamma_n$ . Естественно попытаться ее упростить, даже если придется поступиться оптимальными свойствами. Впрочем, последнее обстоятельство не является определяющим, так как нужные начальные данные обычно неизвестны, а произвольный выбор начальных данных делает процедуру только предельно оптимальной. Некоторые упрощения рекуррентной процедуры МНК в типичных случаях не сказываются на предельных свойствах оценок. Матрицы  $\Gamma_n$  монотонно убывают, если выполнено условие постоянного возбуждения для последовательности  $\{\varphi_n\}$ : существует целое число  $\bar{N} > 0$  и постоянная  $\delta > 0$ , такие, что при любом  $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=n}^{n+\bar{N}} E\{\varphi_k \varphi_k^T\} \geq \delta I.$$

Если  $\Gamma_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то в том случае, когда  $\varphi_n$  равномерно ограничены, при достаточно больших  $n$  справедливо:  $(\mathbf{R}_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n)^{-1} \approx \mathbf{R}_n$ . Следовательно, рекуррентный алгоритм для пересчета оценок можно записать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n \mathbf{R}_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n),$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \varphi_n \mathbf{R}_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}.$$

Другим существенным упрощением в рекуррентной процедуре МНК является использование в алгоритме вместо матриц  $\Gamma_n$  числовых коэффициентов.

В общем случае, при почти произвольных помехах в наблюдении удается доказать состоятельность оценок, доставляемых приведенными ранее рекуррентными алгоритмами МНК, только в некоторых специальных случаях [66, 70]. При предположении, что регрессоры  $\{\varphi_n\}$  имеют статистическую природу и известны их средние значения, в [7, 10] в условиях почти произвольных помех в наблюдениях детально рассмотрены условия сходимости оценок *рандомизированного рекуррентного* МНК, имеющего при  $\gamma_0 > 0$  вид

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0,$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1}}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n}, \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} \mathbf{I},$$

где  $\Delta_n = \varphi_n - \mathbf{E}\{\varphi_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — центрированные входы.

### 3. Оптимальная фильтрация случайных процессов

Под *оптимальной фильтрацией* понимаются алгоритмы обработки реализаций случайных процессов, направленные на максимальное (в смысле некоторого критерия) подавление помех, зашумляющих (обычно аддитивно) полезный сигнал. В фундаменте теории оптимальной фильтрации лежит *метод Винера–Колмогорова* [18, 78] и его рекуррентные модификации, известные под общим названием *фильтра Калмана–Бьюси* [2, 16, 45]. Теория Винера–Колмогорова в существенной степени базируется на методе наименьших квадратов. Оценивание параметров в этой теории происходит на основе обработки последовательно поступающих входных данных, являющихся некоторой траекторией стохастического процесса. Это приводит к важным концепциям физической реализуемости и оптимальности синтезируемого фильтра. В пособии будет описан только случай дискретного времени.

#### 3.1. Фильтр Винера–Колмогорова

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: последовательность наблюдений при  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  удовлетворяет уравнению

$$y_n = \varphi^T \theta_n + v_n,$$

в котором  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — вещественные векторные процессы:  $\theta_n \in \mathbb{R}^r$ ,  $v_n \in \mathbb{R}^m$ ;  $\varphi$  — прямоугольная матрица размерностью  $r \times m$ . Требуется получить оценку  $\hat{\theta}_n$  процесса  $\theta_n$  в момент времени  $n$  по наблюдениям за процессом  $\{y_n\}$  до момента времени  $n - l$ ,  $l$  — заданное целое число. Оценка ищется с

помощью *линейного устойчивого стационарного фильтра*, уравнение которого имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \sum_{i=l}^{\infty} H(i-l)y_{n-i},$$

где  $H(i)$  — *весовая функция фильтра*. Введем *передаточную функцию фильтра*:

$$H(\lambda) = \lambda^l \sum_{i=0}^{\infty} H(i)\lambda^i.$$

Для упрощения ограничимся рассмотрением фильтров с дробно-рациональными передаточными функциями. Дробно-рациональную функцию  $\lambda^{-l}H(\lambda)$  будем называть *устойчивой*, если у нее нет полюсов, которые по абсолютной величине меньше либо равны единице. Свойство устойчивости фильтра равносильно устойчивости функции  $\lambda^{-l}H(\lambda)$ . Задача фильтрации называется по-разному в зависимости от числа  $l$  в уравнении фильтра. При  $l > 0$  ее называют задачей *экстраполяции (прогноза)* на  $l$  моментов времени, при  $l < 0$  — задачей *интерполяции (сглаживания)*, при  $l = 0$  — собственно *фильтрацией*. Таким образом, при сглаживании оценка может зависеть от некоторого числа "будущих" наблюдений, а передаточная функция фильтра имеет полюс порядка  $l$  в начале координат.

В классической постановке задачи рассматриваются стационарные случайные процессы  $\{y_n\}$  и  $\{\theta_n\}$ , которые вдобавок стационарно связаны, и их матрицы ковариаций вместе со спектральными плотностями:  $V_{yy}(n)$ ,  $S_{yy}(\lambda)$ ,  $V_{y\theta}(n)$ ,  $S_{y\theta}(\lambda)$ ,  $V_{\theta\theta}(n)$ ,  $S_{\theta\theta}(\lambda)$ , существуют и известны (см. разд. П.1.4). Оценка  $\hat{\theta}_n$  должна быть оптимальной в смысле минимума среднеквадратичного функционала:

$$f_l = E\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2\} (= f_l(H(\lambda))).$$

В силу стационарности процессов этот функционал не зависит от времени.



Перепишем на основании определений матриц ковариации функционал качества  $f_l$  в виде

$$\begin{aligned}
 f_l &= \text{Tr}[\mathbf{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta_n)(\hat{\theta}_n - \theta_n)^T\}] = \\
 &= \text{Tr}\left[\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{H}(i-l)y_{n-i} - \theta_n\right)\left(\sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{H}(j-l)y_{n-j} - \theta_n\right)^T\right\}\right] = \\
 &= \text{Tr}\left[\mathbf{B}_{\theta\theta}(0) + \sum_{i=l}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{H}(i)\mathbf{B}_{yy}(j-i)\mathbf{H}(j)^T - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{H}(i)\mathbf{B}_{y\theta}(-i-l) - \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{B}_{\theta y}(i+l)\mathbf{H}(j)^T\right].
 \end{aligned}$$

Известно, что преобразование спектральной плотности в линейном фильтре позволяет записать функционал качества  $f_l$  как квадратичную форму от передаточной функции фильтра:

$$\begin{aligned}
 f_l &= \text{Tr}\left[\mathbf{B}_{\theta\theta}(0) + \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\mathbf{H}(\lambda)\mathbf{S}_{yy}(\lambda)\mathbf{H}(\lambda^{-1})^T - \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{S}_{y\theta}(\lambda) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbf{S}_{\theta y}(\lambda)\mathbf{H}(\lambda^{-1})^T\right) \frac{d\lambda}{\lambda}\right].
 \end{aligned}$$

Матрица спектральных плотностей  $\mathbf{S}_{yy}(\lambda)$  — неотрицательно определенная при  $|\lambda| = 1$ . Известно, что такая матричная функция (см. разд. П.3) допускает *факторизацию*, т.е. представление в виде

$$\mathbf{S}_{yy}(\lambda) = \mathbf{\Pi}(\lambda)\mathbf{\Pi}(\lambda^{-1})^T,$$

где  $\mathbf{\Pi}(\lambda)$  — устойчивая матричная функция (ее элементы не имеют полюсов при  $|\lambda| \leq 1$ ). Предположим, что матрица  $\mathbf{S}_{yy}(\lambda)$  — положительно определенная при  $|\lambda| = 1$ . В этом случае можно выбрать такую матрицу  $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ , чтобы  $\mathbf{\Pi}(\lambda)^{-1}$  была устойчивой. С помощью формулы факторизации, учитывая выполнение при  $|\lambda| = 1$  соотношения

$$\mathbf{S}_{\theta y}(\lambda) = \mathbf{S}_{y\theta}(\lambda^{-1})^T,$$

для функционала качества  $f_l$  можно вывести формулу

$$f_l = \text{Tr} \left[ \mathbf{Q} + \frac{1}{2\pi i} \oint \left( H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda) \right) \left( H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda) \right)^T \frac{d\lambda}{\lambda} \right],$$

в которой использованы обозначения:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_{\theta\theta}(0) - \frac{1}{2\pi i} \oint R(\lambda)R(\lambda^{-1})^T \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$R(\lambda) = S_{\theta y}(\lambda) \left( \Pi(\lambda^{-1})^T \right)^{-1}.$$

Так как матрица  $\mathbf{Q}$  не зависит от  $H(\lambda)$ , а второе слагаемое в правой части полученной для  $f_l$  формулы — неотрицательная матрица, то минимум функционала качества  $f_l$  достигается при

$$H(\lambda) = R(\lambda)\Pi(\lambda)^{-1} = S_{\theta y}(\lambda)S_{yy}(\lambda)^{-1},$$

причем минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_l = \text{Tr}[\mathbf{Q}].$$

Однако найденное решение неудовлетворительно, поскольку, вообще говоря, не выполняется условие устойчивости фильтра, так как матрица  $S_{yy}(\lambda)^{-1}$  может иметь особенности при  $|\lambda| \leq 1$  и это свойство передается  $H(\lambda)$ . Для получения устойчивого фильтра надо произвести *сепарацию* функции  $R(\lambda)$ , т.е. представить ее в виде

$$\lambda^{-l}R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda),$$

в котором  $R_+(\lambda)$ ,  $R_-(\lambda^{-1})$  — устойчивые матричные функции и

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R_-(\lambda) = 0.$$

Основной результат теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова заключается в том, что *при сделанных выше предположениях и введенных обозначениях передаточная*

функция оптимального устойчивого фильтра, минимизирующего функционал качества  $f_l$ , определяется по формуле

$$H(\lambda) = \lambda^l R_+(\lambda) \Pi(\lambda)^{-1},$$

и соответствующее минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_l = \text{Tr}[Q] + \frac{1}{2\pi i} \oint \text{Tr}[R_-(\lambda)R_-(\lambda^{-1})^T] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

В случае скалярного процесса  $y_n$  с дробно-рациональной спектральной плотностью процедура построения функции  $\Pi(\lambda)$  сводится, по существу, к нахождению корней и полюсов дробно-рациональной функции  $S_{yy}(\lambda)$ , которые по абсолютной величине больше единицы. Сепарация функции  $\lambda^{-l}R(\lambda)$  в этом случае состоит в выделении целой части функции с последующим определением "устойчивых" и "неустойчивых" полюсов у полученной дробно-рациональной функции.

*Пример: оптимальный прогноз процесса.* Предположим, что при  $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$  наблюдается скалярный процесс  $\{y_n\}$ :

$$y_n = \varphi \theta_n + v_n,$$

где  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стохастически независимые стационарно связанные процессы:  $E\{v_n\} = 0$ ,  $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2$ , причем  $\{\theta_n\}$  определяется уравнением

$$\theta_{n+1} = a\theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $0 < |a| < 1$ ,  $E\{w_n\} = 0$ ,  $E\{w_i w_j\} = \sigma_w^2 \delta_{ij}$ .

В данном случае  $S_{vv} = \sigma_v^2$ ,

$$S_{\theta\theta}(\lambda) = \frac{\sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1})}, \quad S_{yy}(\lambda) = S_{vv} + \varphi^2 S_{\theta\theta}(\lambda).$$

Для проведения факторизации функции  $S_{yy}(\lambda)$  найдем вещественные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  из уравнения

$$\sigma_v^2(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1}) + \varphi^2 \sigma_w^2 = (c_1 + c_2\lambda)(c_1 + c_2\lambda^{-1}).$$

Несложные расчеты дают

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2(1 - a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2(1 + a)^2}.$$

Положив

$$\Pi(\lambda) = \frac{c_1 + c_2\lambda}{1 - a\lambda},$$

с учетом введенных обозначений, имеем:

$$S_{yy}(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T.$$

При этом функции  $\Pi(\lambda)$  и  $\Pi(\lambda)^{-1}$  — устойчивые, так как  $|c_1| > |c_2|$ . Далее, поскольку

$$S_{y\theta}(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1})},$$

то

$$R(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 \lambda}{(1 - a\lambda)(c_1\lambda + c_2)}.$$

Рассмотрим задачу об оптимальном прогнозе на один шаг, т.е. случай  $l = 1$ . Для ее решения надо произвести сепарацию функции:

$$\lambda^{-1}R(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(c_1\lambda + c_2)}.$$

В результате сепарации получаем

$$R_+(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \frac{1}{1 - a\lambda}, \quad R_-(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 c_1}{c_1 + c_2 a} \frac{1}{c_1\lambda + c_2}.$$

Следовательно, передаточная функция оптимального фильтра имеет вид

$$H(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \frac{\lambda}{c_1 + c_2 \lambda}.$$

Отсюда делаем вывод, что две последовательные оптимальные оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  и  $\hat{\theta}_n$  связаны соотношением

$$c_1 \hat{\theta}_{n+1} + c_2 \hat{\theta}_n = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} y_n.$$

Отметим, что последнее уравнение можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_{n+1} = \alpha \hat{\theta}_n - \alpha \varphi (\varphi \hat{\theta}_n - y_n),$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_w^2}{c_1(c_1 + c_2 a)} \left( \equiv \frac{1}{a \varphi^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + a \right) \right).$$

### 3.2. Фильтр Калмана–Бьюси

Теория Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации послужила мощным стимулом поиска новых путей определения конкретных способов синтеза теоретически оптимального фильтра. Большой практический интерес представляет возможность синтезировать оптимальный фильтр рекуррентным способом, обеспечивая удобство его реализации при использовании ЭВМ.

Предположим, что при  $n = 1, 2, \dots$  наблюдается случайный процесс

$$y_n = \varphi_n^T \theta_n + v_n,$$

представляющий собой смесь преобразованного векторного процесса  $\{\theta_n\}$  и векторной помехи  $\{v_n\}$ . Прямоугольные матрицы  $\varphi_n$  этого преобразования считаются известными и в отличие от теории Винера–Колмогорова могут изменяться во

времени. Векторный процесс  $\{\theta_n\}$  порождается соотношением

$$\theta_{n+1} = A_n \theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $\theta_0 = 0$  и  $A_n$  — известная матричная функция времени, а  $\{w_n\}$  — последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации:

$$E\{w_n w_j^T\} = Q_w(n) \delta_{nj}.$$

Обычно считают, что помеха  $\{v_n\}$  также представляет собой последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации

$$E\{v_n v_j^T\} = B_v(n) \delta_{nj},$$

которые при всех  $n$  — невырожденные, и  $\{\varphi_n\}$  — детерминированная последовательность матриц.

Ограничимся рассмотрением задачи об оптимальном одношаговом прогнозе. Для  $n = 1, 2, \dots$  требуется по наблюдениям  $y_1, y_2, \dots, y_n$  найти линейные оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  значений процесса  $\{\theta_n\}$  в моменты времени  $n + 1$ , минимизирующие среднеквадратичные отклонения

$$f_n = E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}\|^2\}.$$

Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности линейной оценки в терминах корреляционных матриц рассматриваемых процессов. Предположим, что оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{\theta}_{n+1} = \sum_{i=1}^n H_n(i) y_i.$$

Если оценка  $\hat{\theta}_{n+1}$  минимизирует функционал качества  $f_n$ , то для любого  $j = 1, 2, \dots, n$  выполнено условие

$$E\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}) y_j^T\} = 0.$$

Это соотношение имеет простой геометрический смысл: случайная величина  $\hat{\theta}_{n+1}$ , являющаяся линейной комбинацией случайных величин  $y_1, \dots, y_n$ , должна быть строго ортогональной проекцией вектора  $\theta_{n+1}$  на подпространство, натянутое на соответствующие векторы наблюдений. В силу предполагаемого вида оптимального фильтра, из последнего выражения получаем нестационарный вариант *уравнения Винера–Хонфа* (в дискретном времени) относительно весовых функций  $H_n(i)$

$$E\{\theta_{n+1}y_j^T\} = \sum_{i=1}^n H_n(i)E\{y_iy_j^T\}.$$

Обозначив  $V_{ij} = E\{y_iy_j^T\}$  и  $K_n = H_n(n)$ , из последнего уравнения, записанного для двух последовательных значений времени  $n$  и  $n+1$ , с одной стороны, получаем

$$E\{(\theta_{n+1} - \theta_n)y_j^T\} = \sum_{i=1}^{n-1} (H_n(i) - H_{n-1}(i))V_{ij} + K_nV_{nj}.$$

С другой стороны, учитывая вид фильтра, порождающего процесс  $\{\theta_n\}$ , имеем

$$E\{(\theta_{n+1} - \theta_n)y_j^T\} = (A_n - I) \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i)V_{ij}.$$

Из последних двух уравнений следует, что при  $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i)) V_{ij} = 0,$$

так как в силу уравнения наблюдений

$$V_{nj} = E\{y_n y_j^T\} = \varphi_n^T E\{\theta_n y_j^T\} + E\{v_n y_j^T\} = \varphi_n^T \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i) V_{ij}.$$

А значит, оптимальной в среднеквадратичном смысле оценкой вектора  $\theta_n$  по наблюдениям  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  также является и оценка

$$\tilde{\theta}^n = \sum_{i=1}^{n-1} (H_{n-1}(i) - D_n(i))y_i,$$

где

$$D_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i).$$

Поэтому

$$E\{\|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\|^2\} = 0$$

или

$$E\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1} D_n(i)\varphi_i^T \theta_i\right\|^2\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} D_n(i)^T B_v(i) D_n(i) = 0.$$

Так как  $B_v(i) > 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , то  $D_n(i) = 0$ , т.е.

$$H_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i).$$

Это и есть искомое соотношение, которому должна удовлетворять весовая функция оптимального фильтра. Учитывая его, несложно найти разностное уравнение для последовательности оптимальных оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{n+1} &= K_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} H_n(i) y_i = K_n y_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i)) y_i = K_n y_n + (A_n - K_n \varphi_n^T) \hat{\theta}_n = \\ &= A_n \hat{\theta}_n - K_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n). \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\Gamma_n = E\{(\hat{\theta}_n - \theta_n)(\hat{\theta}_n - \theta_n)^T\}$$



ковариационные матрицы ошибок оценивания. Матричные функции  $K_n$ , называемые *калмановскими коэффициентами усиления*, непосредственно связаны с  $\Gamma_n$ , так как из уравнения Винера–Хопфа следует

$$\begin{aligned} 0 &= E\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1})(y_n - \varphi_n^T \hat{\theta}_n)^T\} = \\ &= -(A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n \varphi_n + K_n B_v(n). \end{aligned}$$

Сформулируем окончательный результат.

*Калмановский коэффициент усиления  $K_n$  определяется по формуле*

$$K_n = A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1},$$

где  $\Gamma_n$  — ковариационная матрица ошибки оценивания, последовательность которых удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Gamma_{n+1} = (A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n (A_n - K_n \varphi_n^T)^T + K_n B_v(n) K_n^T + Q_w(n+1).$$

Последняя формула легко выводится из разностного уравнения, связывающего две последовательные оценки.

Используя матричное тождество из разд. П.2, рекуррентные соотношения для матриц  $\Gamma_n$  можно переписать в виде

$$\Gamma_{n+1} = A_n \Gamma_n A_n^T - K_n \varphi_n^T \Gamma_n A_n^T + Q_w(n+1)$$

или

$$\Gamma_{n+1} = A_n \left( \Gamma_n - \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_n \right) A_n^T + Q_w(n+1).$$

После задания начальных значений  $\hat{\theta}_0$  и  $\Gamma_0$  вместе с формулой для последовательного пересчета оценок

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n)$$

эти соотношения, называемые *фильтром Калмана–Бьюси*, определяют замкнутую систему для рекуррентного вычисления

$\hat{\theta}_n$  и  $\Gamma_n$  во все моменты времени  $n$ . Такие же формулы можно получить при рассмотрении не только детерминированной последовательности  $\{\varphi_n\}$ , но и если считать ее реализацией некоторого матричного независимого случайного процесса, некоррелированного с помехами  $\{v_n\}$  и с порождающим процессом  $\{w_n\}$ .

Стоит заметить, что при  $A_n \equiv I$ ,  $Q_w(n) \equiv 0$  и выборе матрицы весовых коэффициентов  $R_n = B_v(n)^{-1}$  фильтр Калмана–Бьюси в точности совпадает с обобщенным рекуррентным МНК из разд. 2.3, что и неудивительно.

На практике полученные соотношения часто упрощают, используя для вычисления оценок формулу

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma \varphi_n \alpha (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n)$$

с заданными положительно определенными матрицами  $\Gamma$  и  $\alpha$ . Дальнейшее упрощение возможно при выборе скалярного значения  $\alpha > 0$ .

В случае вырожденных помех наблюдения  $\{v_n\}$ , в частности при задании их неизвестными детерминированными ограниченными функциями, о качестве оценок фильтра Калмана–Бьюси трудно что-либо сказать. Если предположить, что  $\{\varphi_n\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с известным средним значением и положительной ограниченной дисперсией, то для решения задачи о прогнозировании в [9] предложено воспользоваться рандомизированным алгоритмом вида

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - \alpha A_n \Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n),$$

где  $\Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\}$ . Там же показано, что в условиях скалярных наблюдений на фоне неизвестной, но ограниченной неслучайной помехи получаемые по этому алгоритму оценки могут давать достаточно хорошее качество предсказания при  $A_n \equiv A : \|A\| < 1$ .

*Пример: оптимальный прогноз процесса.* Предположим, что при  $n = 1, 2, \dots$  наблюдается скалярный процесс  $\{y_n\}$

$$y_n = \varphi_n \theta_n + v_n,$$

где  $\{\varphi_n\}$ ,  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стохастически независимые процессы:  $E\{v_n\} = 0$ ,  $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2 > 0$ ,  $\theta_0 = 0$  и  $\{\theta_n\}$  определяется уравнением

$$\theta_{n+1} = a\theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $0 < |a| \leq 1$ ,  $E\{w_n\} = 0$ ,  $E\{w_n^2\} = \sigma_w^2 > 0$ . В данном случае

$$B_v(n) \equiv \sigma_v^2, \quad Q_w(n) \equiv \sigma_w^2$$

и при задании  $\hat{\theta}_0 = 0$ ,  $\Gamma_0 = 0$  оптимальная последовательность прогнозирующих оценок вычисляется по формулам

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a \frac{\Gamma_n}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n),$$

$$\Gamma_{n+1} = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi_n^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi_n^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2)} \left( \equiv a^2 \Gamma_n - \frac{a^2 \Gamma_n^2 \varphi_n^2}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} + \sigma_w^2 \right).$$

В стационарном случае при  $\varphi_n \equiv \varphi$  или в той ситуации, когда  $\{\varphi_n\}$  — бернуллиевский процесс:

$$\varphi_n = \pm \varphi, \quad E\{\varphi_n\} = 0,$$

последовательность  $\{\Gamma_n\}$  сходится к пределу  $\Gamma_\infty$ , который можно найти из уравнения

$$\Gamma_\infty = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_\infty \varphi^2)},$$

решение которого есть

$$\Gamma_\infty = \frac{\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2 + \sqrt{(\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2)^2 + 4 \varphi^2 \sigma_w^2 \sigma_v^2}}{2 \varphi^2}.$$

В пределе при  $n \rightarrow \infty$  для оценок фильтра Калмана–Бьюси имеем приближенное соотношение

$$\hat{\theta}_{n+1} \approx a\hat{\theta}_n - a\alpha\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n),$$

в котором обозначено

$$\alpha = \frac{\Gamma_\infty}{\sigma_v^2 + \Gamma_\infty\varphi^2} = \frac{c_1^2 + c_1c_2/a}{\varphi^2c_1^2} \left( \equiv \frac{1}{a\varphi^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + a \right) \right),$$

и

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2\sigma_w^2 + \sigma_v^2(1-a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2\sigma_w^2 + \sigma_v^2(1+a)^2}.$$

Таким образом, в стационарном случае ( $\varphi_n \equiv \varphi$ ) оценки фильтра Калмана–Бьюси в пределе совпадают с оценками фильтра Винера–Колмогорова. Эта связь обусловлена методом наименьших квадратов, заложенным в основу обоих фильтров. Последняя формула также иллюстрирует обоснованность замены в некоторых случаях оценок фильтра Калмана–Бьюси на оценки, доставляемые алгоритмом упрощенного типа. Кроме того, если  $\{\varphi_n\}$  — бернуллиевский независимый процесс, то алгоритм

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a\alpha\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n)$$

относится к типу рандомизированных. Как показано в [9], он может давать удовлетворительные оценки не только в случае независимых центрированных помех наблюдения, но и при неизвестных ограниченных детерминированных помехах. Заметим, что при  $a \approx 1$  и  $\sigma_w \ll \sigma_v$

$$\alpha \approx \frac{\sigma_w}{\varphi\sigma_v}.$$

## 4. Методы стохастической аппроксимации и случайного поиска

В широком смысле *методом стохастической аппроксимации* называют последовательный способ улучшения оценки, минимизирующей функционал среднего риска

$$f(X) = E_w\{F(w, X)\}$$

(см. разд. 1.4), использующий на каждом шаге новые наблюдения и предшествующую оценку. Если штрафная функция  $F(w, X)$  дифференцируема по  $X$ , то минимизирующие этот функционал векторы  $\theta$  находятся среди решений *уравнения регрессии*

$$g(X) = \int \nabla_x F(w, X) P_w(dw) = 0.$$

Пусть распределение вероятностей  $P_w(\cdot)$  неизвестно, но задана обучающая последовательность  $w_1, w_2, \dots$ , им порожденная, и в каждый момент времени  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) доступны измерению величины  $y_n$ , являющиеся при определенном выборе точек  $X_n$  либо значениями функции  $F(w_n, X_n)$ , либо значениями ее вектор-градиента  $\nabla_x F(w_n, X_n)$ , измеренными, может быть, с помехами. В такой ситуации для поиска решений уравнения регрессии можно использовать рекуррентную процедуру типа

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \hat{g}_n(\theta_{n-1}),$$

где  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\{\alpha_n\}$  — специальным образом подбираемая последовательность неотрицательных чисел, называемых *величинами рабочего шага*, а

$$\hat{g}_n(\hat{\theta}_{n-1}) = \tilde{g}_n(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, \hat{\theta}_{n-1})$$

— некоторая "хорошая" аппроксимация в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$  для вектор-градиента функции  $f(\cdot)$ . Подобные алгоритмы типич-

ны для метода стохастической аппроксимации. Иногда формальное определение метода стохастической аппроксимации опирается именно на последнюю формулу, в которой часто предполагается, что  $\{\alpha_n\}$  — заданная детерминированная последовательность неотрицательных чисел. Случайный выбор  $\{\alpha_n\}$  характерен для алгоритмов случайного поиска

#### 4.1. Поиск корня неизвестной функции. Алгоритм Роббинса–Монро

Первой по рекуррентным стохастическим алгоритмам была работа Роббинса и Монро [73], в которой исследовалась задача о нахождении корня вещественной функции  $g(X)$  от вещественного аргумента  $X$ . Предполагалось, что функция неизвестна, но наблюдению экспериментатора доступны ее значения в выбираемых им точках, может быть, с помехами.

Если функция  $g(X)$  нам известна и непрерывно дифференцируема, то задача превращается в классическую из численного анализа. Для ее решения можно воспользоваться методом Ньютона, который генерирует последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  корня  $\theta$  функции  $g(X)$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [g'(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}g(\hat{\theta}_{n-1}),$$

$n = 1, 2, \dots$ , или более простой, но менее эффективной, процедурой:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha g(\hat{\theta}_{n-1})$$

с фиксированным достаточно малым коэффициентом  $\alpha > 0$ , которая не требует умения вычислять производную функции. Если начальное значение  $\hat{\theta}_0$  выбрано достаточно близко к  $\theta$ , то процедура гарантирует сходимость оценок к корню  $\theta$  функции  $g(X)$  при предположениях о том, что  $g(X) < 0$  при  $X < \theta$ ,  $g(X) > 0$  при  $X > \theta$ , производная функции ограничена и  $g'(X) > 0$  в некоторой окрестности точки  $\theta$ . Вообще говоря, эта процедура не требует и дифференцируемости функции  $g(X)$ .

Теперь предположим, что точные значения функции  $g(X)$  и ее производной неизвестны, а доступны только значения функции в выбираемых точках  $X$ , но искаженные помехами. Более точно: пусть каждому вещественному  $X$  соответствует некоторая вещественная случайная величина  $G(w, X)$  с известным распределением вероятностей и средним значением

$$g(X) = E_w\{G(w, X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(w, X)P_w(dw).$$

*Требуется* найти значение  $\theta$ , при котором  $g(\theta) = 0$ , на основании наблюдений реализованных значений случайных величин  $G(w_1, X_1), G(w_1, X_2), \dots$  при выборе параметров испытаний  $X_1, X_2, \dots$ . Для упрощения будем считать, что функция  $g(X)$  — неубывающая и имеет единственный корень. При наблюдениях с помехами метод Ньютона не применим, но второй (упрощенной) процедурой воспользоваться можно, заменив, к примеру, значения функции на их "хорошие" приближения, получаемые усреднением нескольких наблюдений. На самом деле, как установили Г. Роббинс и С. Монро [73], нет необходимости производить серию наблюдений для каждого ранее выбранного параметра испытаний  $\hat{\theta}_{n-1}$ , поскольку величины  $\hat{\theta}_{n-1}$  играют в вычислениях промежуточную роль и значения функции в этих точках представляют интерес не сами по себе, а только в той степени, насколько они ведут нас в направлении к корню функции. Был предложен новый алгоритм:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n Y_n$$

с некоторой выбираемой пользователем последовательностью положительных чисел  $\{\alpha_n\}$ , стремящейся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и удовлетворяющей условиям

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \sum_n \alpha_n^2 < \infty.$$

Этот алгоритм использует на  $n$ -м шаге наблюдение  $Y_n$ , представляющее собой зашумленное значение  $g(\hat{\theta}_{n-1})$ , равное

$G(w_n, \hat{\theta}_{n-1})$ . В многомерном случае, когда  $X \in \mathbb{R}^r$ , алгоритм имеет такой же вид и  $Y_n \in \mathbb{R}^r$ . Он получил общепризнанное название *процедура Роббинса–Монро*. К настоящему времени развиты методы, доказывающие сходимость получаемой таким образом последовательности оценок к корню функции  $g(X)$  при более общих предположениях о свойствах неизвестной функции и меньших ограничениях на последовательность  $\{\alpha_n\}$  (см. разд. П.4.2). Все способы доказательства состоятельности оценок используют предварительную информацию о помехах, предполагая их центрированность в том или ином смысле.

Для примера приведем некоторые соображения, показывающие, что помехи с нулевым средним и ограниченной дисперсией не влияют на асимптотическое поведение алгоритма при  $n \rightarrow \infty$ . С одной стороны, при больших значениях  $n$  шаг алгоритма  $\alpha_n \rightarrow 0$  и значения  $\hat{\theta}_n$  меняются медленно. С другой, для достаточно малого  $\epsilon > 0$  определим  $N_n^\epsilon$  так, чтобы  $\sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i \approx \epsilon$ . Процедуру Роббинса–Монро можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n g(\hat{\theta}_{n-1}) + \alpha_n (g(\hat{\theta}_{n-1}) - Y_n).$$

А значит,

$$\hat{\theta}_{n+N_n^\epsilon} - \hat{\theta}_{n-1} \approx -\epsilon g(\hat{\theta}_{n-1}) + \text{"ошибка"},$$

где

$$\text{"ошибка"} = \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i (g(\hat{\theta}_{i-1}) - Y_i).$$

Если предположить, что помехи  $\{Y_n - g(\hat{\theta}_{n-1})\}_{n=1,2,\dots}$  представляют собой последовательность ортогональных случайных величин с нулевыми средними значениями и ограничен-



ной дисперсией  $\sigma^2(\hat{\theta}_{n-1})$ , тогда для дисперсии ошибки имеем

$$E \left\{ \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i \left( y_n - g(\hat{\theta}_{n-1}) \right)^2 \right\} = \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \mathcal{O}(\alpha_i^2) = \mathcal{O}(\epsilon)\alpha_n.$$

Из последнего соотношения видно, что на итерациях из интервала  $[n, n + N_n^\epsilon)$  для малых  $\epsilon$  и больших  $n$  среднее изменение значения параметра более существенно, чем "ошибка". Следовательно, по крайней мере формально, из приближенной формулы для конечных разностей  $\hat{\theta}_{n+N_n^\epsilon} - \hat{\theta}_{n-1}$  можно сделать заключение о том, что асимптотическое поведение оценок вероятнее всего совпадает с асимптотическим поведением некоторого решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{\theta} = -g(\theta).$$

При дополнительных ограничениях можно показать, что  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$  с вероятностью единица, если  $\theta$  является асимптотически устойчивой точкой этого уравнения.

## 4.2. Минимизация функционала среднего риска

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$f(x) = E_w \{ F(w, x) \}$$

(типа функционала среднего риска — см. разд. 1.4), зависящей от векторного  $r$ -мерного аргумента  $x$ . Предположим, что  $w$  — случайный вектор и  $E_w \{ \cdot \}$  — операция усреднения по его распределению. Пусть  $f(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая функция. Необходимым условием того, что  $\theta$  — точка минимума функции  $f(\cdot)$ , является равенство нулю в этой точке ее вектор-градиента  $\nabla f(\theta) = 0$ .

Предположим, что известны значения вектор-градиента функции  $f(\cdot)$  и ее матрицы-гессiana. Для нахождения точки

минимума можно воспользоваться классической схемой вычислений по методу Ньютона:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1} \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}),$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Если матрица-гессиан  $\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})$  в некоторой окрестности точки  $\theta$  задает положительный ограниченный оператор и начальное значение  $\hat{\theta}_0$  выбрано достаточно близко к точке локального минимума  $\theta$ , то последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  сходится к  $\theta$ . Недостатком этого алгоритма является необходимость обращать матрицу-гессиан на каждом шаге, что может представлять собой определенную трудность при большой размерности. В некоторых случаях удастся выбрать рекуррентный способ для пересчета матриц, обратных к гессиану. Для упрощения алгоритма, матрицы  $[\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}$  иногда обоснованно заменяют на положительные числа  $\alpha_n$ , получая в результате алгоритм типа процедуры Роббинса–Монро.

Если значения градиента функции  $f(\cdot)$  неизвестны, то стандартным подходом к решению задачи является использование конечных разностей для аппроксимации градиента. Пусть  $\{\beta_n\}$  — некоторая последовательность положительных чисел. Обозначим через  $e_i$  стандартный единичный вектор в направлении  $i$ -й координаты. В качестве аппроксимации  $i$ -й компоненты вектор-градиента можно использовать

$$\nabla f(\hat{\theta}_{n-1})_i \approx \frac{f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n e_i) - f(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n e_i)}{2\beta_n}.$$

Отметим, что этот стандартный подход к аппроксимации вектор-градиента требует на каждом шаге алгоритма оценивания произвести  $2r$  измерений значений минимизируемой функции при размерности искомого минимизирующего вектора, равной  $r$ .

### 4.3. Процедура Кифера–Вольфовица

Как поступить, если нельзя использовать в алгоритме не только градиент функции  $f(\cdot)$ , но и ее точные значения? Такая проблема возникает, если вид функций  $f(\cdot)$  и  $F(\cdot, \cdot)$  известен не полностью либо если на вычисление соответствующих значений затрачивается чрезмерное количество усилий при дороговизне экспериментов или большой размерности вектора неизвестных параметров. В задачах оптимизации достаточно часто можно воспользоваться только зашумленной информацией о значениях функции  $F(w, X)$  в выбираемых точках  $X$  с неконтролируемыми при этом значениями случайной величины  $w$ .

Дж. Кифер с Дж. Вольфовицем [68] при  $r = 1$  и Дж. Блюм в многомерном случае [61] для построения последовательности оценок предложили использовать процедуру следующего вида:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2\beta_n},$$

где обозначено:

$$Y_n^\pm = \begin{pmatrix} F\left(w_{2r(n-1)+\frac{3\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_1\right) \\ F\left(w_{2r(n-1)+\frac{7\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_2\right) \\ \vdots \\ F\left(w_{2rn-\frac{1\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_r\right) \end{pmatrix}.$$

Они обосновали состоятельность оценок при определенных предположениях о распределениях соответствующих случайных величин, свойствах функции  $F(\cdot, \cdot)$  и числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$ . Из накладываемых условий обычно следует, что в среднем по всевозможным реализациям  $w$  значение  $(Y_n^+ - Y_n^-)/(2\beta_n)$  совпадает со значением градиента функции  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$ , и асимптотическое поведение оценок, получаемых с помощью процедуры Кифера–Вольфовица,

характеризуется свойствами решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\dot{\theta} = -\nabla f(\theta).$$

В более широком смысле алгоритмы такого типа принято называть *псевдоградиентными* [29]. При внешней простоте, оригинальная процедура Кифера–Вольфовица имеет ряд существенных недостатков. Для доказательства состоятельности оценок приходится накладывать достаточно ограничительные условия на неконтролируемые возмущения; при измерениях значений функции с почти произвольными помехами состоятельность оценок не получается; и даже в тех случаях, когда ограничения на неконтролируемые возмущения и помехи в наблюдении можно пренебречь, на каждом шаге алгоритма приходится делать  $2r$  наблюдений, что в многомерном случае при достаточно большом  $r$  может оказаться трудно осуществимым.

#### 4.4. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Классическую процедуру Кифера–Вольфовица (КВ) в последнее время часто называют *алгоритмом стохастической аппроксимации с фиксированными направлениями*. Существенно улучшить характеристики ее оценок позволяет включение одновременно в канал наблюдения, через выбираемый параметр, и в направление вектора изменения очередной оценки так называемого *пробного одновременного возмущения*. В отличие от классической процедуры Кифера–Вольфовица при выборе очередной точки измерения функции случайному возмущению подвергаются одновременно все координаты.

Пусть  $\{\Delta_n\}$  — последовательность наблюдаемых, одинаково симметрично распределенных случайных векторов с матрицами ковариаций

$$\text{cov}\{\Delta_n \Delta_j^T\} = \delta_{nj} \sigma_{\Delta}^2 \mathbf{I},$$

где  $\sigma_{\Delta} > 0$ , и ограниченным вторым статистическим моментом. Например, для задания пробного одновременного возмущения удобно использовать бернуллиевские случайные векторы (координаты вектора  $\Delta_n$  не зависят друг от друга и принимают с равной вероятностью значения плюс/минус единица). Оказывается, что при зашумленных наблюдениях без существенных потерь в скорости сходимости для построения состоятельной последовательности оценок можно воспользоваться алгоритмом, похожим внешне на классическую процедуру Кифера–Вольфовица, но использующем всего два зашумленных измерения функции  $F(\cdot, \cdot)$  на каждой итерации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2\beta_n}, \quad y_n^{\pm} = F(w_n^{\pm}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n \Delta_n) + v_n^{\pm}.$$

Более того, аналогичными свойствами обладает алгоритм с одним зашумленным наблюдением на каждой итерации:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \Delta_n y_n, \quad y_n = F(w^n, \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n) + v_n.$$

Эти рекуррентные процедуры будем называть *рандомизированными алгоритмами стохастической аппроксимации*, так как в их структуру неотъемлемой частью входит случайное пробное одновременное по всем координатам возмущение, которое также одновременно используется и в задании направления очередного изменения оценки и при выборе новой точки измерения. Иногда встречаются названия *стохастическая аппроксимация со случайными направлениями*, *поисковый алгоритм стохастической аппроксимации* или *стохастическая аппроксимация с возмущением на входе*. В англоязычной литературе широко используется название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация* (simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA).

В [8, 10, 63, 76] приведены точные условия, обеспечивающие состоятельность оценок рандомизированных алгоритмов

стохастической аппроксимации, из которых наиболее существенным является условие о слабой коррелированности пробного возмущения  $\{\Delta_n\}$  и последовательностей неопределенностей  $\{w_n\}$  и  $\{v_n\}$ . Естественно, что среднеквадратичная скорость сходимости первого рандомизированного алгоритма с двумя измерениями обычно выше, чем у второго. Но стоит заметить, что в целом ряде практических задач оптимизации систем реального времени, обнаружения сигналов и адаптивного управления важно иметь возможность использовать алгоритм только с одним наблюдением на каждом шаге, так как в этих задачах трудно сделать не только  $2r$  наблюдений, как в классической процедуре Кифера–Вольфовица, но недоступны даже два наблюдения с независимыми от  $\Delta_n$  помехами.

В отличие от оценивания по классической процедуре Кифера–Вольфовица применение рандомизированных алгоритмов эффективно и при почти произвольных аддитивных помехах в наблюдении  $\{v_n\}$ . В подтверждение этого факта в случае неизвестной, но ограниченной детерминированной последовательности помех  $\{v_n\}$  остановимся здесь только на неформальном объяснении, близком к идее доказательства в работе [6].

Пусть вещественная функция  $f(X)$  вещественного аргумента  $X$  — дважды непрерывно дифференцируемая, ограниченная, сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум  $\mathbb{R}$  в некоторой точке  $\theta = \theta(f(\cdot))$ :

$$(X - \theta)\nabla f(X) \geq \mu(X - \theta)^2, \forall X \in \mathbb{R}$$

с некоторой постоянной  $\mu > 0$ , и для градиента функции выполнено условие Липшица:

$$\|\nabla f(X) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|X - \theta\|, \forall X, \theta \in \mathbb{R}$$

с некоторой постоянной  $A > \mu$ . Выберем пробное одновременное возмущение  $\Delta_n$  принимающим с равной вероятностью значения плюс/минус единица независимо от  $v_n$ .

Рассмотрим последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ , формируемых по рандомизированному алгоритму стохастической аппроксимации с одним измерением. Обозначим  $D_n = (\hat{\theta}_n - \theta)^2$  и, учитывая центрированности  $\Delta_n$  и независимость  $\Delta_n$  от  $v_n$ , оценим условное математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} &\leq D_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta)\mathbb{E}\{\Delta_n y_n|\hat{\theta}_i, i < n\} + \\ &\quad + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\mathbb{E}\{\Delta_n^2 y_n^2|\hat{\theta}_i, i < n\} = D_{n-1} - \\ &\quad - \frac{\alpha_n}{\beta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta)\mathbb{E}\{\Delta_n f(\theta_{n-1} + \beta_n \Delta_n)|\hat{\theta}_i, i < n\} + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\mathbb{E}\{y_n^2|\hat{\theta}_i, i < n\}. \end{aligned}$$

Разложив значение функции  $f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n)$  по формуле Тейлора, получим

$$f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) = f(\hat{\theta}_{n-1}) + \beta_n \Delta_n \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \beta_n^2 \zeta_n,$$

где  $\zeta_n$  — некоторое число между  $\hat{\theta}_{n-1}$  и  $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$  (вообще говоря,  $\zeta_n$  — случайная величина). С учетом последней формулы, принимая во внимание центрированность  $\Delta_n$ , выводим:

$$\mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_n \beta_n\right) D_{n-1} - \alpha_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta) \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \xi_n,$$

где  $\xi_n = \mathbb{E}\{\alpha_n \beta_n \zeta_n^2 / 2 + \alpha_n^2 \beta_n^{-2} y_n^2 | \hat{\theta}_i, i < n\}$ . Отсюда, в силу сильной выпуклости функции  $f(\cdot)$ , видно, что последовательность  $\{D_n\}$  — почти супермартинал:

$$\mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} \leq (1 - \gamma_n) D_{n-1} + \xi_n,$$

где  $\gamma_n = \mu \alpha_n - \alpha_n \beta_n / 2$ . Если предположить, что для числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  выполняются условия

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad \sum_n \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} < \infty, \quad \sum_n \alpha_n \beta_n < \infty,$$

то выполнены все условия леммы П.1 Роббинса–Сигмунда о сходимости почти супермартингалов. Следовательно, последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  — сильносостоятельная. При этом дисперсия ошибки оценивания прямо пропорциональна  $\alpha_n^2/\beta_n^2$ , что хуже соответствующего значения дисперсии ошибки в алгоритме Роббинса–Монро, если помехи независимые и центрированные<sup>2</sup>.

#### 4.5. Пассивная стохастическая аппроксимация

Пусть  $X_n$  и  $Y_n$  — значения из  $r$ -мерного вещественного пространства. В основной форме алгоритма Роббинса–Монро  $Y_n = G(w_n, X_n)$  — наблюдаемые с помехой  $w_n$  в точках  $X_n$  значения некоторой вектор-функции от  $X$ . Последовательность  $\{X_n\}$  выбирается экспериментатором (активный эксперимент). Цель заключается в нахождении точки  $\theta$ , в которой значение функции

$$g(X) = E_w\{G(w, X)\}$$

равно нулю. В некоторых приложениях значения точек  $X_n$ , в которых производятся наблюдения, генерируются извне и не могут быть выбраны экспериментатором, которому необходимо найти корень функции  $g(X)$ .

Рассмотрим задачу: по зашумленным наблюдениям

$$Y_n = g(X_n) + w_n$$

значений функции  $g(\cdot)$  в задаваемых извне точках  $\{X_n\}$  (пассивный эксперимент) определить неизвестный корень  $\theta$  функции  $g(X)$  (для простоты предположим — единственный). Здесь  $\{w_n\}$  — последовательность помех (шумов) и

$$G(w, X) = g(X) + w.$$

---

<sup>2</sup>Таким же недостатком обладает и классическая процедура Кифера–Вольфовица.



Для решения этой задачи в [26] предлагается воспользоваться алгоритмом пассивной стохастической аппроксимации — методом стохастической аппроксимации в комбинации с процедурой непараметрического оценивания с некоторым вещественно-значным ядром  $K(\cdot)$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \beta_n^{-1} K\left(\frac{X_n - \hat{\theta}_{n-1}}{\beta_n}\right) Y_n,$$

где  $n = 1, 2, \dots$  и  $\hat{\theta}_0 = 0$ , а константы  $\beta_n$  представляют ширину *окна*. Ядро  $K(\cdot)$  играет критическую роль. Если точки  $X_n$  и  $\hat{\theta}_{n-1}$  далеки друг от друга, то величина  $K\left(\frac{X_n - \hat{\theta}_{n-1}}{\beta_n}\right)$  очень мала, и текущее наблюдение  $Y_n$  окажет малое влияние на итерацию. Для целей робастности числовые последовательности  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  можно выбрать постоянными. Скорость сходимости этого алгоритма зависит от гладкости исследуемой функции и в общем случае хуже, чем у классической процедуры Роббинса–Монро.

#### 4.6. Модификации алгоритмов стохастической аппроксимации

В этом разделе обсуждаются некоторые модификации алгоритмов стохастической аппроксимации, мотивированные практическими приложениями.

**Метод понижения дисперсии.** Опишем в специальном случае метод, который в статистике носит название *послойная выборка* [69]. Предположим, что мы оцениваем среднее значение некоторой частной характеристики популяции животных  $\theta$ : скажем, вес. Это можно сделать по случайной выборке: случайным образом берем экземпляры индивидуумов, взвешиваем их и усредняем. Представим себе особую ситуацию, когда популяцию разбили на две группы одинакового размера, все индивидуумы в каждой группе имеют одинаковый вес. Пусть экспериментатор имеет возможность выбрать

группу, из которой делается индивидуальная выборка. Тогда для получения среднего значения достаточно выбрать по одному экземпляру из каждой группы и усреднить результат.

Немного обобщим ситуацию. Предположим, что исследуемые объекты разделены на две непересекающиеся группы, которые обозначим  $L$  (легкие) и  $H$  (тяжелые). Пусть задано априорное распределение объектов по классам, т.е. заданы вероятности  $P_L, P_H = 1 - P_L$  принадлежности соответствующим классам и связанные с ними, но неизвестные функции распределения  $G_L(\cdot, X)$  и  $G_H(\cdot, X)$  с неизвестными средними значениями  $g_L(X), g_H(X)$ , которые являются неубывающими функциями.

Для последовательной оценки параметра, соответствующего заданной средней характеристике всего множества, можно воспользоваться процедурой Роббинса–Монро для общей функции распределения  $G(\cdot, X) = P_L G_L(\cdot, X) + P_H G_H(\cdot, X)$ , но лучше использовать алгоритм с сознательным выбором группы. Если обозначить через  $\sigma_L^2(\theta)$  и  $\sigma_H^2(\theta)$  соответствующие условные дисперсии ошибок, то при больших  $n$  дисперсия ошибок для *альтернативного* алгоритма приблизительно равна

$$P_L \sigma_L^2(\theta) + P_H \sigma_H^2(\theta).$$

Эта величина не превосходит значения дисперсии ошибок для оригинальной процедуры с выбором объектов случайным образом из всей популяции:

$$P_L \sigma_L^2(\theta) + P_H \sigma_H^2(\theta) + P_L (g_L(\theta) - g(\theta))^2 + P_H (g_H(\theta) - g(\theta))^2.$$

Таким образом, дисперсия ошибки при альтернативной процедуре всегда не хуже дисперсии ошибки оригинального алгоритма и равна ей только в случае  $g_L(\theta) = g_H(\theta)$ .

Пусть  $P_H = 2/7$ . Возможны несколько вариантов изменения основного алгоритма для понижения дисперсии. Например, можно организовать работу с группами по семь испытаний, используя схему  $H H L L L L L$ , или с группами по четыре,

когда первые три выбираются по схеме *HLL*, а четвертое — случайным образом из всего набора вариантов. Если одна из форм алгоритма хорошо обоснована и сходится, то и остальные работоспособны.

Альтернативный выбор подпопуляции демонстрирует важную особенность в применениях процедуры Роббинса–Монро, а в действительности и всех применений стохастической аппроксимации. Качество поведения алгоритма (скорость сходимости и дисперсия среднего отклонения оценок) очень сильно зависит от *уровня помех*, и все усилия, направленные на его понижение, повышают эффективность алгоритма.

**Усреднение по итерациям:** *усреднения Поляка*. Если установлена сходимость оценок к желаемой точке  $\theta$ , то становится актуальным вопрос о возможности улучшения процесса сходимости. Для этого в [36, 71] было предложено рассмотреть последовательность усредненных оценок

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{N_n} \sum_{i=n-N_n+1}^n \hat{\theta}_i,$$

где  $\{N_n\}$  — некоторая числовая последовательность, стремящаяся к бесконечности, и  $n - N_n \geq 0$ . Такая попытка замены может либо улучшить оценки, либо нет, в зависимости прежде всего от выбора числовой последовательности величин размеров шагов алгоритма  $\{\alpha_n\}$ . Можно показать, что если порядок убывания  $\alpha_n = \mathcal{O}(1/n)$ , то асимптотическое поведение оценок  $\{\tilde{\theta}_n\}$  не лучше, чем у  $\{\hat{\theta}_n\}$  и может быть хуже в смысле среднеквадратичной скорости сходимости. В [36, 71] показано, что в том случае, когда порядок убывания  $\alpha_n$  ниже, чем  $\mathcal{O}(1/n)$ , *алгоритм с усреднением* использовать предпочтительнее. Когда используют алгоритм с усреднением, величину размера шага  $\alpha_n$  выбирают больше, чем в соответствующем обычном алгоритме. Это приводит к *перескоку вокруг  $\theta$*  последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ . Усреднения компенсируют эти

перескоки, и при достаточно общих условиях скорость сходимости оценок  $\{\tilde{\theta}_n\}$  совпадает с максимально возможной скоростью сходимости для оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  при оптимальном выборе матричных коэффициентов алгоритма, что существенно облегчает решение сложной проблемы их определения. Важно заметить, что это свойство универсально для всех алгоритмов стохастической аппроксимации.

**Ограничения.** На практике допустимые значения параметра  $\theta$  часто принадлежат некоторому неизменному множеству  $\Theta$ , заданному явно или неявно. Иногда в процессе оценивания информация об этом множестве обогащается, и его описание может изменяться. Несколько соответствующих примеров будет приведено в последнем разделе. Если компоненты вектора  $\theta$  — физические или экономические величины, то естественно считать их заключенными в границы между нижним и верхним значениями. Даже если физический или экономический смысл параметров не накладывает априорных ограничений на их значения, то все равно естественно с подозрением относиться к получающимся в результате работы алгоритма относительно большим значениям оценок в сравнении с ожидавшимися.

Простейшая наиболее часто используемая модификация алгоритмов заключается в *усечении* оценок, когда они становятся слишком большими или слишком малыми. Предположим, что заданы конечные  $A_i < B_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , такие, что если  $i$ -я компонента вектора  $\hat{\theta}_n$  в алгоритме получается больше  $B_i$  (или соответственно — меньше  $A_i$ ), то берется  $\hat{\theta}_{ni} = B_i$  (или  $\hat{\theta}_{ni} = A_i$ ).

Если наша цель состоит в минимизации некоторой функции потерь  $f(\cdot)$  при условии обеспечения целевого неравенства

$$f(\theta) \leq C_0$$

с некоторым максимально допустимым уровнем  $C_0$ , то для

этого примера зададим *множество ограничений*

$$\Theta = \{\theta : A_i \leq \theta_i \leq B_i, f(\theta) - C_0 \leq 0\}.$$

Определим  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  — оператор проектирования на множество  $\Theta$  — как результат выбора ближайшей к  $X$  точки из  $\Theta$ . Если  $X \in \Theta$ , то  $\mathcal{P}_\Theta(X) = X$ . Подходящий *алгоритм с ограничениями* (или *с проекцией*) имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \mathcal{P}_\Theta(\hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n Y_n),$$

где  $Y_n$  — какая-нибудь аппроксимация вектор-градиента функции  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$ .

**Робастные алгоритмы.** При практическом использовании того или иного алгоритма возможна ситуация, когда определенные наблюдения реализации случайной величины дают очень большие значения. Как правило, в реальных системах при больших значениях параметров малоизвестны модели динамики или трудно что-либо предположить о статистических свойствах помех. В таких ситуациях модель часто определяют из соображений удобства использования или традиций. Однако нежелательно, чтобы одно большое по величине наблюдение существенно сказалось на вычислении текущей оценки. Для этого надо использовать более *робастные процедуры* по аналогии с процедурами робастного статистического анализа.

Опишем один из возможных подходов. Пусть  $\psi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , ограниченные вещественные функции, заданные на вещественной оси, не убывающие и удовлетворяющие условиям:  $\psi_i(0) = 0$ ,  $\psi_i(u) = -\psi_i(-u)$  и  $\psi_i(u)/u \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ . Один из наиболее часто используемых вариантов функций:  $\psi_i(u) = \min\{u, K_i\}$  для  $u \geq 0$ , где  $K_i$  — заданные константы.

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \Psi(X) = \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) \\ \psi_2(x_2) \\ \vdots \\ \psi_r(x_r) \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и ранее,  $Y_n$  — какая-нибудь аппроксимация вектор-градиента функции потерь  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$ . Алгоритм

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Psi(Y_n)$$

является подходящей процедурой из робастной статистики. Его важное преимущество состоит в том, что ограничен эффект больших значений в помехах наблюдения. Действительно, если чрезмерное значение помехи реализовалось в наблюдениях, то это наблюдение будет проигнорировано (в отличие от алгоритма с проектированием, где срезается значение получаемой текущей оценки). Если алгоритм стохастической аппроксимации используется в реальной системе, а не в процессе компьютерного моделирования, и появились наблюдения с большими значениями, то, вообще говоря, надо постараться определить физическую причину такого значения, а не отказываться от учета этого наблюдения без всяких вопросов.

В [32] исследовался вопрос о связи качества оценок с выбором функции  $\Psi(\cdot)$  в зависимости от вида функции распределения помехи, если известно, что  $Y_n$  — результат измерения (или вычисления) вектор-градиента функции потерь  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$ , произведенного с аддитивной помехой. В частности, при предположении о том, что независимые центрированные помехи имеют плотность распределения  $p(\cdot)$ , обосновывается оптимальный вид функции  $\Psi(\cdot)$ :

$$\Psi(Y_n) = \nabla \ln\{p(Y_n)\}.$$

В [33] похожий способ выбора функции  $\Psi(\cdot)$  предлагается как оптимальный в некотором минимаксном смысле для определенного класса алгоритмов.

### Выпуклая недифференцируемая оптимизация.

Пусть  $f(\cdot)$  — вещественная выпуклая функция векторного аргумента размерностью  $r$ . Вектор  $g$  называется *субградиентом* функции  $f(\cdot)$  в точке  $\theta$ , если

$$f(\theta + X) - f(\theta) \geq g^T X$$

для всех  $X \in \mathbb{R}^r$ . Обозначим через  $\partial f(X)$  множество субградиентов функции  $f(\cdot)$  в точке  $X$ . Это множество — замкнутое и выпуклое. Рассмотрим задачу минимизации функции  $f(\cdot)$ . Пусть  $\{\hat{\theta}_n\}$  — последовательность оценок некоторого минимизирующего алгоритма. Предположим, что для каждого  $\hat{\theta}_{n-1}$  наблюдается вектор  $Y_n = g_n + w_n$ , где  $w_n$  — помехи наблюдения и  $g_n \in \partial f(\hat{\theta}_{n-1})$ . В этой ситуации для минимизации функции  $f(\cdot)$  в [14] предлагается воспользоваться алгоритмом Роббинса–Монро:

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \alpha_n Y_n = \theta_{n-1} - \alpha_n (g_n + w_n).$$

Если  $f(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая функция, тогда вектор-градиент  $\nabla f(X)$  является единственным элементом множества  $\partial f(X)$ , иначе в алгоритме используется субградиент, выбираемый некоторым образом из множества  $\partial f(X)$ .

**Односторонняя сходимость.** В некоторых практических приложениях при нахождении корня неизвестной функции важно построить такую последовательность оценок, которая сходилась бы к искомой точке с одной стороны. Например, в биологических испытаниях животным дают фиксированные дозы  $X_n$  некоторого препарата с целью оценки интенсивности реакции определенного вида на его прием. Для каждого испытуемого можно наблюдать только два исхода — либо гибель:  $y_n = 0$ , либо выживание:  $y_n = 1$ . Всякому подопытному животному соответствует некоторая минимальная летальная доза, превышение которой вызывает гибель животного. При меньшей дозе животное выживает. Пусть  $G(w, X)$  — функция

распределения исходов испытаний с дозой препарата, равной  $X$ , и  $g(X)$  — среднее значение исходов соответствующих испытаний. При заданном уровне  $\bar{g}$  *требуется* найти соответствующую ему дозу  $\theta$ . Для решения задачи можно было бы воспользоваться обыкновенным алгоритмом Роббинса–Монро, но из экономических и гуманных соображений хочется уменьшить количество смертельных исходов испытаний. Это достигается за счет модификации основной процедуры:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n(\bar{g} + \beta_n - y_n),$$

использующей дополнительную числовую последовательность  $\{\beta_n\}$ . В работе Т.П. Красулиной [20] обосновывается для любого сколь угодно малого  $\varepsilon$  специальный способ выбора последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$ , обеспечивающий с вероятностью  $1 - \varepsilon$  непревышение заданного уровня смертности  $\bar{g}$  при использовании оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ .

#### 4.7. Алгоритмы случайного поиска

Алгоритмы стохастической аппроксимации относятся к более широкому классу алгоритмов *случайного поиска* [12, 38, 39].

В упрощенном варианте суть метода случайного поиска применительно к задаче о нахождении точки минимума  $\theta$  функции  $f(\cdot)$  состоит в следующем. Задается случайным или детерминированным способом начальное приближение  $\hat{\theta}_0$ . На шаге с номером  $n$  выбирается случайным образом  $\Delta_n$  — вектор направления изменения предыдущей оценки  $\hat{\theta}_{n-1}$ . Обычно используются случайные векторы, равномерно распределенные на единичной сфере. Вычисляется значение функции в точке  $\hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n$  и сравнивается со значением  $f(\hat{\theta}_{n-1})$ . Оче-



редная оценка формируется по правилу

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n, & \text{если } f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n) < f(\hat{\theta}_{n-1}), \\ \hat{\theta}_{n-1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для вычисления очередной оценки по этому алгоритму предполагается возможность точного вычисления значения минимизируемой функции в задаваемых точках.

В обобщающей форме вид поисковых алгоритмов для минимизации функционалов типа среднего риска и для решения ряда других близких задач может быть описан так. Выбираем случайным или детерминированным способом начальное приближение  $\hat{\theta}_0$ . На  $n$ -м шаге также случайным или детерминированным способом выбираются  $l$  векторов  $\Delta_n^1, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^l$  и в  $l+1$  точках  $\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n\Delta_n^1, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n\Delta_n^2, \dots, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n\Delta_n^l$  вычисляются значения штрафной функции  $F(\cdot, \cdot)$ :

$$y_{n,i} = F(w_n^i, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n\Delta_n^i) + v_{n,i},$$

где  $i = 0, 1, \dots, l$ ,  $\Delta_n^0 = 0$ . После этих предварительных вычислений новую оценку  $\hat{\theta}_n$  получаем по правилу

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n\beta_n^{-1} \sum_{i=1}^l \Delta_n^i (y_{n,i} - y_{n,0}).$$

Отличительная особенность этих алгоритмов — возможность использования при отсутствии априорных жестких ограничений на тип функции  $F(\cdot, \cdot)$ . В частности, обычно трудно проверяемыми являются условия непрерывности и дифференцируемости. Во многих практических случаях этими алгоритмами пользуются без строгого математического обоснования, удовлетворяясь получаемым качеством оценивания, которое достаточно часто удается повысить за счет адаптации (приспособления) параметров алгоритмов к конкретной ситуации. Адаптация величины рабочего шага  $\{\alpha_n\}$  связана с двумя противоречивыми факторами: шаг должен быть достаточно большим в то время, когда текущая оценка далека от истинной, и необходимо его уменьшать по мере приближения к

положению экстремума. Очень плодотворной оказывается следующая эвристика: нужно уменьшать  $\alpha_n$  при "неудачном" шаге и увеличивать при "удачном". Помимо этого возможна адаптация параметров распределений векторов  $\{\Delta_n^i\}$  в зависимости от поступающей на каждом шаге поиска информации об успехе или неуспехе того или иного случайного шага.

## 5. Элементы теории оценивания

В рамках теории оценивания основным является вопрос о состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Важнейшими методами получения оценок являются *метод эмпирического функционала* [4], *байесовский подход* и *метод максимума правдоподобия* [56].

### 5.1. Метод эмпирического функционала

Рассмотрим задачу минимизации функционала среднего риска

$$f(X) = E_w\{F(w, X)\} = \int F(w, X)P_w(dw),$$

в котором  $P_w(\cdot)$  — функция распределения, заданная на некотором вероятностном пространстве событий. Возможность аналитического решения этой задачи предполагает знание распределения  $P_w(\cdot)$ . Вместе с тем, в ряде практических задач распределение  $P_w(\cdot)$  не известно, но в распоряжении экспериментатора может быть определяемая им независимая выборка  $w_1, w_2, \dots, w_N$ . Одним из естественных подходов к задаче нахождения минимума является восстановление по этой выборке распределения  $P_w(\cdot)$ , точнее — построение *эмпирического функционала*:

$$f_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(w_k, X),$$

который соответствует вычислению *методом Монте-Карло* интеграла, задающего исходный функционал  $f(X)$  [12]. Пусть величины  $F(w_k, X)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , — случайные, независимые, одинаково распределенные и задано некоторое множество  $\Theta$ , содержащее  $X$ . Если подинтегральная функция  $F(w, X)$

равномерно ограничена или удовлетворяет более слабому условию

$$\sup_{X \in \Theta} \int \|F(w, X)\|^2 P_w(dw) < \infty,$$

то в соответствии с законом больших чисел (см. разд. П.1.3) с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле при  $N \rightarrow \infty$  значения эмпирического функционала сходятся к соответствующим значениям исходного:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(X) = f(X),$$

причем сходимость в среднеквадратичном смысле имеет место равномерно по  $X \in \Theta$ .

Оценкой *метода эмпирического функционала* называется

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{X \in \Theta} f_N(X),$$

т.е. любая из точек множества  $\Theta$ , соответствующая наименьшему значению функционала  $f_N(X)$ . При сделанных предположениях последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  в среднеквадратичном смысле и с вероятностью единица сходится к множеству точек  $\bar{\Theta}$ , минимизирующих функционал  $f(X)$ . В частности, если множество  $\bar{\Theta}$  состоит всего из одной точки, то последовательность  $\{\hat{\theta}_n\}$  — состоятельная.

В задачах идентификации динамических объектов и адаптивного управления появляются более сложные эмпирические функционалы вида

$$f_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(k, w_k, X),$$

где штрафная функция  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  зависит явно от времени, а случайные величины  $\{w_k\}$  не являются независимыми.

## 5.2. Байесовские оценки

Марковские оценки и оценки МНК обладают тем преимуществом, что не требуют знания значительной априорной информации. Но если имеется априорная информация о возможных значениях оцениваемых параметров, то интуитивно понятно, что учет этой информации может позволить улучшить оценку. При использовании рекуррентных модификаций МНК можно в настраиваемых моделях устанавливать начальные значения параметров в соответствии с априорными знаниями и предположениями. При этом, однако, не удастся достаточно просто ввести в схему оценивания степень достоверности этих данных. В такой ситуации оказывается полезным *байесовский подход* к задаче оценивания.

Существенным моментом байесовской процедуры оценивания параметров является определение апостериорной плотности  $p(\theta|Y)$  условного распределения параметра  $\theta$  относительно наблюдений  $Y$ , вычисляемой обычно по *формуле обратной вероятности (формуле Байеса)*:

$$p(\theta|Y) = p(Y|\theta) \frac{p(\theta)}{p(Y)}.$$

В  $p(\theta|Y)$  заключена вся информация, представляющая интерес для экспериментатора. Зная функцию  $p(\theta|Y)$ , можно по тем или иным признакам принять решение, какую оценку параметра  $\theta$  считать наилучшей. Представление апостериорной плотности в удобном для принятия решений виде — дело непростое. Обычно наилучшая оценка определяется выбором функции штрафа, который более или менее произволен, и только в редких случаях диктуется самой постановкой задачи.

Пусть  $\theta \in \Theta$  и  $Q(X, \theta)$  — некоторая функция штрафа (потерь при ошибочном выборе вектора  $X$  вместо  $\theta$ ), определенная на множестве  $\Theta \times \Theta$ . *Байесовская оценка*  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$  как функция произведенных наблюдений  $Y$  выбирается из

условия минимизации *функционала условного среднего риска*:

$$f(X) = \int_{\Theta} Q(X, \theta) p(\theta|Y) d\theta.$$

На практике чаще всего рассматривается одна из следующих трех функций штрафа:

1. Квадратичная функция:

$$Q(X, \theta) = (X - \theta)^T R (X - \theta)$$

с положительно определенной симметричной весовой матрицей  $R$ . В этом случае наилучшая оценка представляет собой *условное среднее*:

$$\hat{\theta}(Y) = \int_{\Theta} \theta p(\theta|Y) d\theta.$$

2. Абсолютная величина отклонения:

$$Q(X, \theta) = \|X - \theta\|.$$

Соответствующая наилучшая оценка  $\hat{\theta}(Y)$  является *медианой* плотности  $p(\theta|Y)$ , т.е. удовлетворяет условию

$$\int_{\Theta} \frac{\hat{\theta} - \theta}{\|\hat{\theta} - \theta\|} p(\theta|Y) d\theta = 0.$$

3. Наиболее вероятное значение:

$$Q(X, \theta) = -\delta(X - \theta),$$

здесь  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака. Наилучшая оценка

$$\hat{\theta}(Y) = \arg \max_{\theta} p(\theta|Y)$$

является *модой* условного распределения.

Если предположить, что апостериорная плотность распределения  $p(\theta|Y)$  симметрична относительно некоторой точки  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(Y)$ , т.е.

$$p(\tilde{\theta}(Y) + X|Y) = p(\tilde{\theta}(Y) - X|Y)$$

для произвольного вектора  $X$ , то все эти три оценки совпадают с  $\tilde{\theta}(Y)$ . Более того (см. [45, лемму 1.4.1]), *оптимальные оценки при симметричной апостериорной плотности совпадают с точкой симметрии для всех функций штрафа вида  $Q(X, \theta) = q(X - \theta)$ , где  $q(\cdot)$  — симметричные относительно нуля выпуклые дифференцируемые функции.* Этот факт важен для приложений, так как избавляет от необходимости обосновывать выбор функции штрафа.

Рассмотрим для примера задачу об оценивании векторного параметра  $\theta$  линейной регрессии по наблюдениям величины

$$Y = \Phi^T \theta + V.$$

Предположим, что случайные величины  $\theta$  и  $V$  — стохастически независимые гауссовские с нормальными законами распределения  $\mathcal{N}(M_\theta, B_\theta)$  и  $\mathcal{N}(0, B_v)$  соответственно. При этом будем считать известной матрицу  $\Phi$ . Плотность распределения случайной величины  $\theta$ , отвечающая закону  $\mathcal{N}(M_\theta, B_\theta)$ , называется *априорной* (доопытной), плотность распределения  $p(\theta|Y)$  — *апостериорной*. Из условий задачи следует, что случайная величина  $Y$  является гауссовской случайной величиной с параметрами

$$\mathcal{N}(\Phi^T M_\theta, \Phi^T B_\theta \Phi + B_v),$$

причем условная плотность  $p(Y|\theta)$  — гауссовская с параметрами

$$E\{Y|\theta\} = \Phi^T \theta,$$

$$\text{cov}(Y Y^T | \theta) = E\{(Y - \Phi^T \theta)(Y - \Phi^T \theta)^T | \theta\} = B_v,$$

т.е.  $p(Y|\theta) = p_v(Y - \Phi^T \theta)$ , где  $p_v(\cdot)$  — плотность распределения случайной величины  $V$ . Согласно формуле Байеса имеем

$$p(\theta|Y) = p_v(Y - \Phi^T \theta) \frac{p(\theta)}{p(Y)}$$

и, следовательно, для квадратичной функции штрафов  $Q(X, \theta) = \|X - \theta\|^2$  получаем оценку

$$\hat{\theta}(Y) = \frac{\int_{\Theta} \theta p(\theta) p_v(Y - \Phi^T \theta) d\theta}{p(Y)}$$

как функцию наблюдений  $Y$ . Вычисление по последней формуле достаточно затруднительно.

Другой, более простой, способ заключается в нахождении точки симметрии плотности распределения  $p(\theta|Y)$ . Для этого можно выделить полный квадрат по  $\theta$  в выражении для показателя экспоненты функции  $p(\theta|Y)$ . Несложные вычисления приводят к формуле

$$\hat{\theta}(Y) = (B_{\theta}^{-1} + \Phi B_v^{-1} \Phi^T)^{-1} (B_{\theta}^{-1} M_{\theta} + \Phi B_v^{-1} Y).$$

*Пример.* Применим полученный результат к задаче из разд. 1.1 об оценивании величины постоянного сигнала с наблюдениями

$$y_n = \theta + v_n$$

при  $n = 1, 2, \dots, N$ , предполагая, что  $\theta$  и помехи  $\{v_n\}$  — скалярные гауссовские случайные величины с параметрами  $\mathcal{N}(M_{\theta}, \sigma_{\theta}^2)$  и  $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  соответственно:  $\sigma_{\theta} > 0$ ,  $\sigma_v > 0$ . Обозначив

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \Phi = (1, 1, \dots, 1), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},$$

для байесовской оценки получим выражение

$$\hat{\theta}(Y) = \frac{1}{\sigma_{\theta}^{-2} + N\sigma_v^{-2}} \left( \sigma_{\theta}^{-2} M_{\theta} + \sigma_v^{-2} \sum_{k=1}^N y_k \right).$$

При  $N \rightarrow \infty$  оптимальная (байесовская) оценка совпадает с полученной ранее среднеарифметической. При конечных  $n$  оценка зависит от априорных данных  $M_{\theta}$  и  $\sigma_{\theta}$ .



### 5.3. Метод максимального правдоподобия

Если апостериорная плотность распределения  $p(\theta|Y)$  симметрична относительно некоторой точки  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$ , то, как уже упоминалось, для всех функций штрафа вида  $Q(X, \theta) = q(X - \theta)$  ( $q(\cdot)$  — симметричные относительно нуля выпуклые дифференцируемые функции) оптимальные оценки совпадают с  $\hat{\theta}(Y)$ . Другими словами, оптимальная оценка не зависит от точного вида функции штрафа и апостериорной плотности. Для многих встречающихся в приложениях распределений точка симметрии  $\hat{\theta}(Y)$  является одновременно и точкой максимума апостериорной плотности  $p(\theta|Y)$ . Этот факт указывает на достаточно универсальный способ нахождения оптимальных оценок, а именно: из условия максимизации апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров

$$\hat{\theta}(Y) = \arg \max_{\theta} p(\theta|Y).$$

В силу формулы Байеса соотношение

$$p(\hat{\theta}(Y)|Y) = \max_{\theta} p(\theta|Y)$$

эквивалентно следующему:

$$p(Y|\hat{\theta}(Y))p(\hat{\theta}(Y)) = \max_{\theta} p(Y|\theta)p(\theta),$$

в котором  $p(\theta)$  — априорная плотность распределения параметра  $\theta$  и  $p(Y|\theta)$  — условная плотность распределения случайной величины  $Y$ . При достаточно высокой информативности данных наблюдения  $Y$  и отсутствии каких-либо специфических ограничений на взаимосвязь компонент вектора  $\theta$  априорная статистика  $p(\theta)$  слабо влияет на структуру и вид оптимального решения. Поэтому последнее соотношение можно заменить на более простое для приближенного определения оптимальной оценки

$$p(Y|\hat{\theta}(Y)) = \max_{\theta} p(Y|\theta).$$

Интуитивное обоснование разумности получения оценок из последнего соотношения состоит в том, что в качестве оценки выбирается то значение параметра, для которого появление выборки  $Y$  может произойти с наибольшей вероятностью.

Функция  $L(Y, \theta) = p(Y|\theta)$  называется *функцией правдоподобия* и играет важную роль в различных разделах математической статистики. При гладкой зависимости функции  $L(Y, \cdot)$  от  $\theta$  можно записать одно из необходимых условий выполнения последнего соотношения:

$$\nabla_{\theta} \ln L(Y, \theta) = 0.$$

Решения этого уравнения называют *оценками максимального правдоподобия*. Сам метод получения таких оценок получил название *метод максимального (максимума) правдоподобия* (ММП).

Рассмотрим случай независимых наблюдений  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , каждое из которых определяется условной плотностью  $p(y|\theta)$ , зависящей от параметра  $\theta$ . Пусть  $Y$  — их совокупность. Тогда

$$L(Y, \theta) = \prod_{k=1}^N p(y_k|\theta).$$

С вычислительной точки зрения удобнее искать точку максимума у функции  $-\ln L(Y, X)$ . Ее выборочное среднее

$$L_N(X) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln p(y_k|X)$$

является оценкой величины

$$f(X) = -E\{\ln p(y|X)|Y\}.$$

При достаточно общих условиях (см. закон больших чисел, разд. П.1.3) выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N(X) = -E\{\ln p(y|X)|Y\} = - \int \ln p(y|X) p(y|\theta) dy.$$

Более точно: метод максимума правдоподобия можно в случае независимых наблюдений рассматривать как специальный вариант метода эмпирического функционала для среднего риска  $f(X)$ , в котором роль эмпирического функционала играет функция  $L_N(X)$ . Если плотность  $p(y|\theta)$  удовлетворяет условию

$$\int [\ln p(y|X)]^2 p(y|\theta) dy < \infty$$

и функционал  $f(X)$  имеет единственный минимум, то последовательность оценок ММП  $\{\hat{\theta}_n\}$ , минимизирующих соответствующие функции  $L_N(X)$ , — состоятельная.

Истинное значение  $\theta$  доставляет минимум функционала среднего риска, так как в силу выпуклости логарифмической функции и неравенства Иенсена (см. разд. П.1.2) для любого  $X$  имеем

$$\begin{aligned} f(X) - f(\theta) &= -\mathbb{E} \left\{ \ln \frac{p(y|X)}{p(y|\theta)} \middle| Y \right\} \geq -\ln \mathbb{E} \left\{ \frac{p(y|X)}{p(y|\theta)} \middle| Y \right\} = \\ &= -\ln \int p(y|\theta) dy = 0. \end{aligned}$$

Равенство здесь достигается только в тех случаях, когда

$$p(y|X) = p(y|\theta)$$

для почти всех  $y$ .

Приведенные соображения подсказывают путь исследования свойств оценок ММП в более общем случае. Действительно, если функционал  $f(X)$  дифференцируем, то истинное значение параметра  $\theta$  должно находиться среди решений уравнения регрессии

$$\int \nabla_x [\ln p(y|X)] p(y|\theta) dy = 0.$$

Для его решения можно воспользоваться, например, процедурой Роббинса–Монро

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \nabla_{\theta} \ln \{p(y_n | \hat{\theta}_{n-1})\},$$

где  $\alpha_n$  — подходящим образом выбираемая последовательность неотрицательных чисел и  $y_n$  — случайные величины с плотностью распределения  $p(y|\theta)$ .

*Пример.* Вернемся к задаче об оценивании величины постоянного скалярного сигнала, наблюдаемого на фоне независимых центрированных помех — разд. 1.1, в котором уже рассматривались оценки метода максимального правдоподобия в случае гауссовских помех. Каков вид оценок при других распределениях помех?

Если помехи распределены равномерно на симметричном интервале  $[-1/2, 1/2]$ , то функция правдоподобия имеет вид

$$L(Y, X) = \prod_{k=1}^N p(y_k|X) = \prod_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{X \in [y_k - \frac{1}{2}, y_k + \frac{1}{2}]\}}$$

и в качестве оценки метода максимального правдоподобия можно выбрать любое число из интервала

$$\hat{\theta} \in \left[ \max\{y_1, y_2, \dots, y_N\} - \frac{1}{2}, \min\{y_1, y_2, \dots, y_N\} + \frac{1}{2} \right].$$

Если распределение помех подчиняется закону распределения Лапласа, то

$$L(Y, X) = \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^N e^{-|y_k - X|}$$

и логарифм функции правдоподобия с минусом равен

$$-\ln L(Y, X) = N \ln 2 + \sum_{k=1}^N |y_k - X|.$$

Эту функцию максимизирует оценка, равная *медиане* множества наблюдений. Не умаляя общности можно считать, что последовательность наблюдений упорядочена:

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N.$$

В рассматриваемом случае оценкой метода максимального правдоподобия является

$$\hat{\theta} = y_{k+1}, \text{ если } N = 2k + 1,$$

и любое число из интервала

$$\hat{\theta} \in [y_k, y_{k+1}], \text{ если } N = 2k.$$

#### 5.4. Достижимая точность оценивания

Рассмотрим один из возможных способов определения качества оценивания по методу максимального правдоподобия в терминах дисперсии и ковариационных матриц. Пусть  $L(Y, \theta)$  — функция правдоподобия, достаточно гладкая по  $\theta$ , причем

$$\int L(Y, \theta) dY = 1.$$

Следовательно,

$$\int \nabla_{\theta} L(Y, \theta) dY \equiv 0$$

или

$$\int (\nabla_{\theta} [\ln L(Y, \theta)])^T L(Y, \theta) dY = E\{\nabla_{\theta} \ln L\} \equiv 0.$$

Продифференцировав еще раз по  $\theta$ , можно получить матричное тождество:

$$\int (\nabla_{\theta} [(\nabla_{\theta} \ln L)^T] L + (\nabla_{\theta} \ln L)(\nabla_{\theta} \ln L)^T L) dY \equiv 0,$$

из которого следует

$$E_Y\{\nabla_{\theta} [(\nabla_{\theta} \ln L)^T]\} = -E_Y\{(\nabla_{\theta} \ln L)(\nabla_{\theta} \ln L)^T\}.$$

Пусть  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$  — некоторая оценка вектора  $\theta$ . Обозначим через  $d(\theta)$  возможное смещение оценки:

$$E_Y\{\hat{\theta}\} = \int \hat{\theta}(Y)L(Y, \theta)dY = \theta + d(\theta).$$

Продифференцировав последнюю формулу, можно вывести, что

$$\int \hat{\theta}(Y)[\nabla_{\theta} \ln L(Y, \theta)]^T L(Y, \theta)dY = I + \nabla[d(\theta)]^T$$

с матрицей  $\nabla[d(\theta)]^T$ , составленной из градиентов компонент вектор-строки  $d(\theta)^T$ . С учетом предыдущих соотношений в итоге получаем

$$\int (\hat{\theta}(Y) - E_Y\{\hat{\theta}\})[\nabla_{\theta} \ln L]^T L dY = I + \nabla[d(\theta)]^T.$$

Определим *информационную матрицу Фишера*

$$A(\theta) = E_Y\{(\nabla_{\theta} \ln L)(\nabla_{\theta} \ln L)^T\} = -E_Y\{\nabla_{\theta}[(\nabla_{\theta} \ln L)^T]\}.$$

Приведенные рассуждения фактически доказывают следующее важное утверждение о *достижимой точности оценивания*:

**Теорема.** *Если функция правдоподобия  $L(Y, \theta)$  такова, что существует информационная матрица Фишера  $A(\theta)$  и она обратима, тогда для матрицы ковариаций любой оценки  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$  вектора  $\theta$  справедливо неравенство Крамера-Рао:*

$$\begin{aligned} E\left\{(\hat{\theta}(Y) - E_Y\{\hat{\theta}\})(\hat{\theta}(Y) - E_Y\{\hat{\theta}\})^T\right\} &\geq \\ &\geq \left(I + \nabla[d(\theta)]^T\right)A^{-1}(\theta)\left(I + \nabla[d(\theta)]^T\right)^T. \end{aligned}$$

В частности, для несмещенной оценки  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$  (при  $d(\theta) = 0$ ) дисперсия удовлетворяет неравенству

$$E_Y\{\|\hat{\theta}(Y) - \theta\|^2\} \geq \text{Tr}[A^{-1}(\theta)].$$

Несмещенная оценка  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y)$  называется *эффективной*, если неравенство Крамера–Рао для нее превращается в равенство. Это имеет место только при выполнении соотношения

$$\nabla_{\theta} \ln L(Y, \theta) = \mu(\theta)(\hat{\theta}(Y) - \theta)$$

с некоторой скалярной функцией  $\mu(\theta)$ , не зависящей от  $y$ .

В том случае, когда вектор наблюдений  $Y$  состоит из значений независимых и одинаково распределенных случайных величин  $y_1, y_2, \dots, y_N$  с плотностью распределения  $p_y(\cdot|\theta)$ , информационная матрица Фишера имеет вид

$$A_N(\theta) = -N E_Y \{ \nabla_{\theta} [\nabla_{\theta} \ln p_y(y|\theta)]^T \} = N A_1(\theta).$$

Если матрица  $A_1^{-1}(\theta)$  обратима, то для корреляционной матрицы эффективной оценки можно получить асимптотическую формулу при  $N \rightarrow \infty$

$$E_Y \{ (\hat{\theta}_N - \theta)(\hat{\theta}_N - \theta)^T \} = \frac{1}{N} A_1^{-1}(\theta),$$

из которой следует состоятельность последовательности, составленной из эффективных оценок  $\{\hat{\theta}_N\}$ .

В общем случае, если матрица  $N^{-1}A_N(\theta)$  предельно невырождена, т.е.

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} A_N(\theta) > 0,$$

то асимптотически эффективная оценка является состоятельной.

*Пример.* Рассмотрим задачу из разд. 1.2 об обнаружении наблюдаемого на фоне помех  $\{v_n\}$  известного скалярного сигнала  $\{\varphi_n\}$ , представляющего собой реализацию последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным средним значением  $M_{\varphi}$  и конечной дисперсией  $\sigma_{\varphi}^2 \geq 0$ . Пусть при  $n = 1, 2, \dots, N$  наблюдаются скалярные случайные величины

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n.$$

Задача состоит в оценивании неизвестного значения  $\theta$ , равного нулю или единице. Если предположить, что помехи  $\{v_n\}$  — гауссовские одинаково распределенные с плотностью распределения  $p_v(\cdot)$  и параметрами  $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ ,  $\sigma_v > 0$ , то информационная матрица Фишера

$$A_N(\theta) = -N E_{y,\varphi} \{ \nabla_{\theta} [\nabla_{\theta} \ln p_v(y - \theta\varphi)] \} = N \frac{\sigma_{\varphi}^2 + M_{\varphi}^2}{\sigma_v^2}$$

и, как видно, не зависит явно от  $\theta$ . В данном случае нетрудно убедиться, что оценка, полученная методом максимального правдоподобия совпадает с соответствующей марковской оценкой (см. разд. 2.2), а обращение информационной матрицы Фишера совпадает со средним значением условной ковариации марковской оценки. Для марковской оценки, в силу ее несмещенности, неравенство Крамера–Рао превращается в равенство. Ранее уже упоминалась эффективность марковских оценок (в смысле минимума дисперсии) в классе линейных оценок. Неравенство Крамера–Рао показывает, что при гауссовской помехе наблюдения марковские оценки эффективны в более широком классе несмещенных оценок, являющихся произвольными функциями данных наблюдения.

В следующем разделе этот пример будет рассмотрен в случае неизвестных ограниченных помех, задаваемых детерминированной функцией.



## 6. Задачи оценивания и оптимизации при ограниченных, а в остальном — произвольных помехах

Понятие *почти произвольные помехи*, как правило, в тексте пособия строго формально не определяется, подразумевая широкий класс всевозможных помех: как случайных с разной степенью взаимной зависимости, так и неслучайных. Несмотря на отсутствие четкого определения во всех случаях предполагается, что к нему относятся помехи, порождаемые детерминированными, неизвестными, но ограниченными функциями.

### 6.1. Случайный сигнал, наблюдаемый на фоне ограниченных помех

Рассмотрим задачу об оценивании коэффициента усиления известного скалярного сигнала  $\{\varphi_n\}$ , представляющего собой реализацию последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным известным средним значением  $M_\varphi$  и конечной положительной дисперсией  $\sigma_\varphi^2 > 0$ , наблюдаемого на фоне неизвестных ограниченных помех  $\{v_n\}$ . Более точно: по наблюдениям при  $n = 1, 2, \dots$  скалярных случайных величин

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n,$$

где

$$|v_n| \leq C_v,$$

*требуется* последовательно оценивать неизвестное значение  $\theta$ .

В литературе при описании способов решения задач такого типа: при ограниченных, а в остальном — произвольных помехах, часто приводится следующий алгоритм.

Пусть задан некоторый интервал  $\Theta = \Theta_0 = [a_0, b_0]$ , гарантированно содержащий значение  $\theta$ . На каждом шаге, получив

новое наблюдение  $y_n$ , можно уточнить границы множества, содержащего  $\theta$ , по следующему правилу:

$$\Theta_n = [a_n, b_n] = \Theta_{n-1} \cap \{X : |y_n - \varphi_n X| \leq C_v\}.$$

Если  $a_n \rightarrow b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. интервалы  $\Theta_n$  стягиваются в точку, то очевидно, что хорошей оценкой величины  $\theta$  на шаге с номером  $n$  может быть любой из элементов множества  $\Theta_n$ , например  $\hat{\theta}_n = (a_n + b_n)/2$ . Состоятельность последовательности оценок будет гарантирована.

Но, к сожалению, существенных оснований надеяться на то, что  $a_n \rightarrow b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , нет. В этой ситуации можно говорить только о получении предельного множества  $\Theta_\infty$ , которое гарантированно содержит неизвестное искомое значение  $\theta$ . Исторически так сложилось, что результатом такого типа обычно удовлетворяются, считая невозможным при решении этой задачи получить лучший ответ. В [7] показано, что и в этой задаче возможно получение последовательности состоятельных оценок.

Далее приведем несколько примеров алгоритмов построения множеств, гарантированно содержащих вектор неизвестных параметров.

## 6.2. Метод рекуррентных целевых неравенств. Конечно-сходящиеся алгоритмы

Как и в примере предыдущего раздела, так и во многих других случаях задачи оценивания, оптимизации, адаптивного управления и т.п. могут быть сформулированы в следующем виде (см. [11, 58, 59, 72]).

Для некоторой функции  $\psi(\cdot, \cdot)$ , заданной на  $\mathbb{W} \times \Theta$ , найти элемент  $\theta \in \Theta$  (не обязательно единственный), для которого при любом  $w \in \mathbb{W}$  выполняются неравенства

$$\psi(w, \theta) \leq 0,$$

которые обычно называют *целевыми неравенствами*. Если множество  $\mathbb{W}$  — не конечное, то набор из целевых неравенств представляет собой бесконечномерную систему неравенств.

В ряде практических задач в распоряжении экспериментатора есть некоторая тренировочная (обучающая) последовательность точек  $w_1, w_2, \dots$  из множества  $\mathbb{W}$ , для которой известны значения функции  $\psi(w_k, \theta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и, полученная таким образом подсистема неравенств

$$\psi(w_k, \theta) \leq 0,$$

где  $k = 1, 2, \dots$ , может быть использована для отыскания нужного вектора  $\theta$ . Конечно, подлежит специальному исследованию вопрос о том, в каких случаях решения этой подсистемы являются и решениями исходной. Ответ на него можно дать, сделав некоторые предположения о характеристиках функции  $\psi(\cdot, \cdot)$  и о статистических свойствах последовательности  $w_1, w_2, \dots$ . В интересующей нас ситуации очередное неравенство в момент времени  $n$  формируется лишь после нахождения предыдущей оценки  $\hat{\theta}_{n-1}$ . В этом контексте подсистему неравенств  $\psi(w_k, \theta) \leq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называют *рекуррентными целевыми неравенствами*.

Рассмотрим последовательность множеств

$$\Theta_0 = \Theta, \quad \Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \psi(w_n, \theta) \leq 0\},$$

$n = 1, 2, \dots$ ,  $\Theta_0 \supseteq \Theta_1 \supseteq \dots$ . Для любого  $n$  можно утверждать, что для всякого  $\theta$ , являющегося решением исходной системы целевых неравенств, выполнено условие  $\theta \in \Theta_n$ . Иногда при обосновании сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации с проектированием важно знать, что рекуррентный способ построения последовательности множеств  $\{\Theta_n\}$  — *конечно-сходящийся* в том смысле, что начиная с некоторого  $n$ , множества  $\Theta_n$  перестают изменяться:

$$\Theta_n = \Theta_{n_*}, \quad n \geq n_*.$$

Конечно-сходящийся алгоритм (КСА) за конечное число шагов доставляет решение бесконечного числа заранее неизвестных рекуррентных неравенств.

Сформулируем два условия, при выполнении которых можно незначительно видоизменить описанный способ рекуррентного построения последовательности множеств  $\{\Theta_n\}$  так, чтобы он стал конечно-сходящимся.

- При каждом  $n = 1, 2, \dots$  множество  $\{\theta : \psi(w_n, \theta) \leq 0\}$  — выпуклое.

- Среди решений всех рекуррентных целевых неравенств есть непустой открытый шар, т.е. существует  $\theta \in \Theta$  и некоторое  $\delta > 0$ , такое, что для любого  $n = 1, 2, \dots$  и любого  $X : \|X - \theta\|^2 \leq \delta$  выполнено условие  $\psi(w_n, X) \leq 0$ .

При выполнении этих условий определим последовательности точек  $\{\hat{\theta}_n\}$  и множеств  $\{\Theta_n\}$  по следующему правилу: при  $n = 0$  полагаем

$$\hat{\theta}_0 \in \Theta, \Theta_0 = \Theta;$$

при  $n = 1, 2, \dots$ ,  
если  $\psi(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) \leq 0$ , то

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1}, \Theta_n = \Theta_{n-1},$$

в противном случае в качестве  $\hat{\theta}_n$  выбираем ближайший к  $\hat{\theta}_{n-1}$  элемент из

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \psi(w_n, X) \leq 0 \forall X : \|X - \theta\|^2 \leq \delta\}.$$

Для полученной последовательности имеем  $\Theta_0 \supseteq \Theta_1 \supseteq \dots$ . В результате построения этой последовательности множеств можем потерять некоторые решения исходной системы целевых неравенств, но по крайней мере одно из них, равное  $\theta$ , принадлежит всем множествам:  $\theta \in \bigcap_n \Theta_n$ . Первое условие существенно ограничивает круг задач, решаемых с помощью конечно-сходящегося алгоритма, но во многих практических

приложениях оно выполняется. Второе условие не ограничительно и имеет достаточно естественный характер.

Основная идея доказательства конечной сходимости алгоритма заключается в следующем. Предположим, что множества  $\Theta_n$  изменяются бесконечное число раз. Пусть эти изменения происходят в моменты времени, задаваемые последовательностью  $\{n_i\}$ . Рассмотрим числовую последовательность  $\{d_i\}$ , определяемую по правилу

$$d_i = \|\hat{\theta}_{n_i} - \theta\|^2,$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Из способа построения подпоследовательности  $\{\hat{\theta}_{n_i}\}$  следует, что для элементов числовой последовательности  $\{d_i\}$  при каждом  $i = 0, 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$d_i \leq d_{i-1} - \delta.$$

Просуммировав эти неравенства  $N$  раз ( $N > 0$ ), имеем

$$0 \leq d_N \leq d_0 - \delta N.$$

Если в последнем неравенстве  $N > d_0/\delta$ , то получаем противоречие. Следовательно, количество переключений с одного значения  $\hat{\theta}_i$  на другое конечно, а значит, и множества в последовательности  $\{\Theta_n\}$  изменяются только конечное число раз. Из последнего неравенства при ограниченном исходном множестве  $\Theta$  можно получить оценку для максимального числа изменений множеств в КСА:

$$N_{\max} \leq \text{diam}(\Theta)/\delta,$$

здесь  $\text{diam}(\Theta)$  — наибольшее из расстояний между двумя произвольными точками множества  $\Theta$ .

Конкретный вид рекуррентных алгоритмов для решения разнообразных целевых неравенств с обоснованием их сходимости можно найти в [11, 58, 59, 72]. Далее будет рассмотрен лишь частный, но важный случай, относящийся к линейным неравенствам.

### 6.3. Алгоритм "Полоска"

Наиболее простой вид функции  $\psi(w, \theta)$  — линейный:

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq 0,$$

$n = 1, 2, \dots$  Здесь

$$w_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

где  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  — некоторые последовательности векторов и чисел соответственно. Возможные способы решения такой системы линейных неравенств первоначально рассматривались в [60].

Очевидно, что в этой задаче первое условие построения конечно-сходящегося алгоритма, выполнено. Второе условие означает, что существуют такие вектор  $\theta$  и  $\delta > 0$ , что

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \|\varphi_n\|,$$

где  $n = 1, 2, \dots$  Чаще всего в приложениях к линейным системам с ограниченными помехами встречается частный случай рекуррентных линейных неравенств

$$|\varphi_n^T \theta + \eta_n| \leq \varepsilon_n,$$

здесь  $n = 1, 2, \dots$  и  $\{\varepsilon_n\}$  — некоторая последовательность положительных чисел. В этом случае второе условие построения конечно-сходящегося алгоритма означает, что существуют числа  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < \varepsilon_*$  и вектор  $\theta$  (не известный), такие, что при  $n = 1, 2, \dots$

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_* \|\varphi_n\|,$$

$$|\varphi_n^T \theta + \eta_n| \leq \delta \varepsilon_n.$$

В этом случае каждое из рекуррентных неравенств выделяет в векторном пространстве параметров  $\Theta$  определенную *полосу*,

шириной не менее  $2\varepsilon_*$ . Выполнение последнего неравенства гарантирует, что все эти полосы включают в себя некоторый шар радиусом  $\delta$ , содержащий  $\theta$ .

Для последнего случая в [44, 59] формулируется более простой конечно-сходящийся алгоритм построения последовательности точек  $\{\hat{\theta}_n\}$ , при изменении которых надо перестраивать соответствующие множества  $\{\Theta_n\}$ , содержащие  $\theta$ .

Пусть  $\hat{\theta}_0 \in \Theta$  и  $\Theta_0 = \Theta$ .

Если

$$|\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n| \leq \varepsilon_n,$$

то

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} \text{ и } \Theta_n = \Theta_{n-1},$$

в противном случае

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \varphi_n \frac{\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n - \text{sgn}(\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n) \delta \varepsilon_n}{\|\varphi_n\|^2},$$

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \varepsilon_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта процедура называется *алгоритмом "Полоска"*.

Если исходное множество совпадает со всем пространством или является многогранным, то получающиеся по сформулированному алгоритму множества — тоже многогранники. Как уже отмечалось, в некоторых алгоритмах стохастической аппроксимации при ограниченных помехах целесообразно использовать операцию проектирования на множество, соответствующую поиску ближайшего элемента. Конечная сходимость алгоритма перестроения множеств  $\Theta_n$  важна по двум причинам. Во-первых, иногда при доказательстве асимптотических свойств поведения оценок, построенных по алгоритму с проектированием, важно быть уверенными, что, начиная с некоторого момента, ограничивающее возможные значения параметров множество не меняется. Во-вторых, при практической реализации алгоритма проектирования на многогранное множество надо иметь конструктивный способ описания

набора плоскостей, которые его ограничивают. При бесконечном количестве ограничивающих плоскостей трудно представить себе реальный способ хранения такой информации.

При своей кажущейся простоте, описанный способ все-таки имеет существенные трудности при реализации на практике. Во многих случаях используют более простые алгоритмы, хотя при этом трудно доказать их конечную сходимость. Если алгоритм предполагается использовать вместе с другим, более чутким, то конечную сходимость алгоритма можно обеспечить простым практическим условием: прекратить коррекции после заранее заданного определенного количества шагов. Наиболее удобным с точки зрения операций проектирования и хранения информации является последовательное построение в пространстве параметров прямоугольников, содержащих некоторое решение системы рекуррентных целевых неравенств.

#### 6.4. Метод эллипсоидов

Другим примером алгоритма построения множеств, удобных для выполнения операций проектирования и хранения необходимой информации, является *метод эллипсоидов* (см. [21, 53]).

Рассмотрим задачу о решении линейных рекуррентных неравенств

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq 0,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Предположим, как и ранее, существование таких вектора  $\theta$  и константы  $\delta > 0$ , что при  $n = 1, 2, \dots$

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \|\varphi_n\|.$$

Не умаляя общности, будем считать, что начальное множество, содержащее  $\theta$  — решение системы рекуррентных неравенств, задано в виде эллипсоида (или шара):

$$\Theta_0 = \{\theta : (\theta - \hat{\theta}_0)^T R_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}_0) \leq 1\}$$



с центром в некоторой точке  $\hat{\theta}_0$  и симметричной положительно определенной матрицей  $R_0$ . Рассмотрим рекуррентный алгоритм построения последовательности эллипсоидов  $\{\Theta_n\}$ :

$$\Theta_n = \{\theta : (\theta - \hat{\theta}_n)^T R_n^{-1} (\theta - \hat{\theta}_n) \leq 1\},$$

определяемый последовательно пересчитываемыми точками  $\{\hat{\theta}_n\}$  и положительно определенными матрицами  $\{R_n\}$ . Правило их пересчета следующее: при  $n = 1, 2, \dots$ ,

если  $\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n \leq 0$ , то  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1}$ ,  $R_n = R_{n-1}$ ,

в противном случае

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{R_{n-1} \varphi_n}{(r+1) \sqrt{\varphi_n^T R_{n-1} \varphi_n}},$$

$$R_n = \frac{r^2}{r^2 - 1} \left( R_{n-1} - \frac{2}{n+1} \frac{R_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T R_{n-1}}{\varphi_n^T R_{n-1} \varphi_n} \right),$$

здесь  $r$  — размерность пространства параметров  $\theta$ . Для максимально возможного числа коррекций эллипсоидов  $\{\Theta_n\}$  можно получить оценку сверху:

$$N_{\max} \leq r \frac{\ln\{\|\hat{\theta}_0 - \theta\|/\delta\}}{\ln\{(r+1)(r^2-1)^{\frac{r-1}{2}} r^{-r}\}},$$

которая при больших  $r$  приблизительно равна

$$2r^2(1 + \mathcal{O}(n^{-2})) \ln \frac{\|\hat{\theta}_0 - \theta\|}{\delta}.$$

Алгоритм имеет простую геометрическую интерпретацию. Если предыдущая оценка  $\hat{\theta}_{n-1}$  не удовлетворяет очередному целевому неравенству, задающему некоторую гиперплоскость в пространстве параметров  $\theta$ , то параллельно ей через центр последнего из построенных эллипсоидов проводится гиперплоскость. Эта гиперплоскость делит эллипсоид на две части,

одна из которых содержит точку  $\theta$ . После этого новый эллипсоид строится как наименьший по объему, содержащий нужную часть предыдущего эллипсоида. При этом оказывается, что отношение объемов нового и старого эллипсоидов не превосходит величины

$$\frac{r^r}{(r+1)(r^2-1)^{\frac{r-1}{2}}} < 1.$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е.  
**НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

---

## П.1. Теория вероятностей

Для более глубокого понимания основ теории вероятностей и методов обработки случайных процессов советуем прочитать книги [22, 55]. В этом разделе приводятся определения основных понятий и формулировки результатов, используемых в пособии.

### П.1.1. Случайные величины

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — некоторое измеримое пространство и  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  — числовая прямая с системой борелевских множеств  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Действительная функция  $\xi = \xi(\omega)$ , определенная на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримой функцией или случайной величиной, если для любого  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  — произвольное вероятностное пространство. Математическим ожиданием  $\mathbf{E}\{\xi\}$  произвольной случайной величины  $\xi$  называется интеграл Лебега от  $\mathcal{F}$ -измеримой функции  $\xi = \xi(\omega)$  по мере  $\mathbf{P}$ , для которого (наряду с  $\mathbf{E}\{\xi\}$ ) используются также следующие обозначения:

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbf{P}\{d\omega\}$$

или

$$\int_{\Omega} \xi d\mathbf{P}.$$

*Дисперсией* случайной величины  $\xi$  называется величина  $\sigma^2 = \mathbf{E}\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\}$ , при этом величина  $\sigma > 0$  называется *стандартным отклонением*.

Пусть  $\zeta$  и  $\eta$  — пара случайных величин. Их *ковариацией* называется величина

$$\text{cov}\{\zeta, \eta\} = \mathbf{E}\{(\zeta - \mathbf{E}\{\zeta\})(\eta - \mathbf{E}\{\eta\})\}.$$

Если  $\text{cov}\{\zeta, \eta\} = 0$ , то говорят, что случайные величины  $\zeta$  и  $\eta$  *не коррелированы*.

*Распределением случайной величины*  $\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  называется вероятностная мера  $P_\xi(\cdot)$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ :

$$P_\xi(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Из определения следует, что

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx).$$

Функция

$$P_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

называется *функцией распределения случайной величины*  $\xi$ . Неотрицательная функция  $p_\xi(\cdot)$  называется *плотностью* функции распределения случайной величины  $\xi$ , если

$$P_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt.$$

Случайная величина  $\xi$  называется *гауссовской* (или *нормально распределенной*) с параметрами  $M$  и  $\sigma^2$  ( $\xi \sim \mathcal{N}(M, \sigma^2)$ ),  $|M| < \infty$ ,  $\sigma > 0$ , если выражение для ее плотности  $p_\xi(\cdot)$  имеет следующий вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются *независимыми* (*независимыми в совокупности*), если для любых  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}.$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины с

$$\mathbf{E}\{|\xi|\} < \infty \text{ и } \mathbf{E}\{|\eta|\} < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\{|\xi\eta|\} < \infty$$

и

$$\mathbf{E}\{\xi\eta\} = \mathbf{E}\{\xi\}\mathbf{E}\{\eta\}.$$

Понятие *случайная величина* естественным образом обобщается и на векторный случай. Для *случайных векторов* по аналогии можно определить математическое ожидание, дисперсию, матрицы ковариации, распределение и т.п.

Совокупность случайных величин  $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  называют *случайным процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью*. Для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  последовательность  $\{\xi_n(\omega)\}$  называется *реализацией* или *траекторией* процесса, соответствующей исходу  $\omega$ .

## П.1.2 Некоторые неравенства для случайных величин

**Неравенство Чебышева** [55, с. 209]. Пусть  $\xi$  — неотрицательная случайная величина. Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\xi\}}{\varepsilon}.$$

**Неравенство Иенсена** [55, с. 209]. Пусть  $g(x)$  — выпуклая функция, а  $\xi$  — случайная величина с  $\mathbf{E}\{\xi\} < \infty$ . Тогда

$$g(\mathbf{E}\{\xi\}) \leq \mathbf{E}\{g(\xi)\}.$$

**Неравенство Гёльдера** [55, с. 210] Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $1 < q < \infty$  и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если  $E\{|\xi|^p\} < \infty$  и  $E\{|\eta|^q\} < \infty$ , то

$$E\{|\xi\eta|\} < \infty$$

и

$$E\{|\xi\eta|\} < (E\{|\xi|^p\})^{1/p}(E\{|\eta|^q\})^{1/q}.$$

### П.1.3. Закон больших чисел для независимых случайных величин

**Закон больших чисел** [55, с. 347]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с

$$E\{\xi_1\} < \infty, \quad E\{\xi_1\} = M$$

и при  $n = 1, 2, \dots$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - M \right| \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

**Теорема Кантелли** [55, с. 376]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых случайных величин с конечным четвертым моментом:

$$E\{|\xi_n - E\{\xi_n\}|^4\} \leq C < \infty,$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью единица

$$\frac{S_n - E\{S_n\}}{n} \rightarrow 0.$$

**Усиленный закон больших чисел (Колмогорова)** [55, с. 377]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых случайных величин с конечными вторыми моментами, положительные числа  $\beta_n$  таковы, что  $\beta_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum \frac{\mathbb{E}\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^2\}}{\beta_n^2} < \infty$$

и

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью единица

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\{S_n\}}{\beta_n} \rightarrow 0.$$

#### П.1.4. Стационарные случайные процессы

Последовательность  $\{\xi_n\}$  случайных векторов  $\xi_n$  называется *стационарной* (в широком смысле) *процессом*, если среднее значение и ковариация не зависят от сдвига по времени. Для стационарного в широком смысле случайного процесса справедливо представление в виде стохастического интеграла Ито:

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i\mu n} d\zeta_\mu + \bar{\xi},$$

где  $-\infty < n < \infty$ ;  $\bar{\xi}$  — константа;  $\{\zeta_\mu\}$  — случайный процесс с некоррелированными центрированными приращениями, т.е. такой, что при любых  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$  из интервала  $[0; 2\pi]$  удовлетворяет условиям

$$\mathbb{E}\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_3} - \zeta_{\mu_4})^*\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_2} - \zeta_{\mu_1})^*\} = U_{\xi\xi}(\mu_2) - U_{\xi\xi}(\mu_1)$$

с монотонно неубывающей (в смысле квадратичных форм) симметричной матричной функцией  $U_{\xi\xi}(\cdot)$ , называемой *спектральной (структурной) функцией* процесса  $\{\xi_n\}$ . Здесь  $\zeta^*$  — строка, комплексно-сопряженная к вектору  $\zeta$ .

Спектральная функция может содержать *сингулярную* и *непрерывную* составляющие:

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \overline{\overline{U}}_{\xi\xi}(\mu) + \overline{U}_{\xi\xi}(\mu).$$

Элементы матрицы  $\overline{U}_{\xi\xi}(\mu)$  — абсолютно непрерывные функции, т.е. при почти всех (по мере Лебега)  $\mu \in [0; 2\pi]$  существует производная

$$\overline{S}_{\xi\xi}(\mu) = \frac{d\overline{U}_{\xi\xi}(\mu)}{d\mu}.$$

В основной части пособия рассматриваются только регулярные стационарные процессы, спектральные функции которых не имеют сингулярных частей. Для таких процессов спектральную функцию  $U_{\xi\xi}(\mu)$  можно представить в виде

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \int_0^\mu \overline{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu.$$

Матрица  $\overline{S}_{\xi\xi}(\mu)$  называется *матрицей спектральных плотностей* (или *спектральной плотностью*) процесса  $\{\xi_n\}$ . Из определения функции  $U_{\xi\xi}(\mu)$  следует, что матрица  $\overline{S}_{\xi\xi}(\mu)$  — неотрицательно определенная, а для матрицы ковариации можно записать формулу:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\xi_k, \xi_l\} &= B_{\xi\xi}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} dU_{\xi\xi}(\mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Стационарные процессы  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  называются *стационарно связанными*, если совокупный процесс  $\{\xi_n, \eta_n\}$  — стационарный.



нарный. Для стационарно связанных центрированных процессов  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$ , имеющих спектральные плотности, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\xi_k, \xi_l\} &= B_{\xi\xi}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S_{\xi\xi}(\mu)} d\mu \\ \text{cov}\{\xi_k, \eta_l\} &= B_{\xi\eta}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S_{\xi\eta}(\mu)} d\mu, \end{aligned}$$

где  $\overline{S_{\xi\eta}(\mu)}$  — совместная спектральная плотность;  $B_{\xi\eta}(n)$  — матрица ковариации процессов  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$ . Введя комплексную переменную  $\lambda = e^{-i\mu}$ , последние формулы удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} B_{\xi\xi}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\xi}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ B_{\xi\eta}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\eta}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned}$$

где  $\oint$  — интеграл по единичной окружности, ориентированный так, что  $\oint d\lambda/\lambda = 2\pi i$ , и

$$S_{\xi\xi}(\lambda) = \overline{S_{\xi\xi}(\mu)}, \quad S_{\xi\eta}(\lambda) = \overline{S_{\xi\eta}(\mu)}.$$

### П.1.5. Последовательности случайных величин, близкие к супермартингалам

**Лемма П.1** [34, с. 54, лемма 10; 76]. *Если  $\nu_0, \dots, \nu_n, \dots$  — последовательность неотрицательных случайных величин:*

$$E\{\nu_0\} < \infty, \quad \nu_n \geq 0,$$

$n = 0, 1, \dots, u$

$$E\{\nu_{n+1} | \nu_0, \dots, \nu_n\} \leq (1 - \alpha_n)\nu_n + \beta_n,$$

где  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — некоторые числовые последовательности, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \beta_n \geq 0, \quad \sum \alpha_n = \infty, \quad \sum \beta_n < \infty, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0,$$

тогда с вероятностью единица

$$\nu_n \rightarrow 0, \quad \mathbf{E}\{\nu_n\} \rightarrow 0$$

и для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $n > 0$

$$\mathbf{P}\{\nu_j \leq \varepsilon \forall j \geq n\} \geq 1 - \varepsilon^{-1} \left( \mathbf{E}\{\nu_n\} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \right).$$

## П.2. Некоторые матричные соотношения

**Матричное тождество.** Пусть матрицы  $A, D, A + B^TDB$  — невырожденные. Тогда

$$(A + B^TDB)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B^T(D^{-1} + BA^{-1}B^T)^{-1}BA^{-1}.$$

Проверить выполнение этого тождества можно, умножив обе части формулы на  $(A + B^TDB)$ .

**Матричное неравенство** ([45, с. 69]. Пусть матрица  $A^T A$  — невырожденная. Тогда для произвольной матрицы  $B$  соответствующей размерности

$$B^T B \geq B^T A (A^T A)^{-1} A^T B.$$

## П.3. Факторизация матричных функций

Общие результаты о спектральной факторизации положительных операторов можно найти в [47, см. разд. 2.3, с. 89–93]. Здесь ограничимся формулировкой теоремы, касающейся важного частного случая: факторизации дробно-рациональных функций (д.-р.ф.).

**Теорема** (теорема 3.П.6 из [44, с. 182]). Пусть  $S(\lambda)$  — дробно-рациональная (матричная) функция с вещественными коэффициентами в матричных элементах, определенная и неотрицательная при всех  $|\lambda| = 1$ . Тогда существует устойчивая д.-р.ф.  $\Pi(\lambda)$ , такая, что справедливо представление

$$S(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T$$

при всех комплексных значениях  $\lambda$ .

При этом, если  $\det S(\lambda) \neq 0$  при  $|\lambda| = 1$ , то  $\Pi(\lambda)^{-1}$  — устойчивая д.-р.ф.

## П.4. Сходимость рекуррентных алгоритмов

В этом разделе приводятся несколько общих результатов по исследованию свойств оценок, доставляемых рекуррентными алгоритмами. И хотя в тексте пособия нет прямых ссылок на эти результаты, их формулировка полезна с целью иллюстрации разнообразных возможностей анализа оценок, которые можно использовать в дальнейшем изучении.

### П.4.1. Линейный случай

Изложение в этом разделе следует работе [31], в которой для анализа рекуррентных стохастических алгоритмов применяется подход, аналогичный первому методу Ляпунова в теории устойчивости.

Рассмотрим итеративный процесс вида

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n (R(\hat{\theta}_{n-1}) + \zeta_n), \quad R(X) = B(X - \theta),$$

где  $n$  — номер итерации;  $\{\hat{\theta}_n\}$  — последовательность  $r$ -мерных векторов;  $\alpha_n \geq 0$  — детерминированные скаляры;  $B$  — матрица размерностью  $r \times r$ ;  $\theta$  — искомое решение;  $\zeta_n$  — помехи.

В качестве меры близости приближения  $\hat{\theta}_n$  к  $\theta$  будем рассматривать матрицу

$$S_n = E\{(\hat{\theta}_n - \theta)(\hat{\theta}_n - \theta)^T\}.$$

Следующая теорема характеризует поведение матриц  $S_n$ :

**Теорема** [31, теоремы 1–2]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица  $(-B)$  — устойчива, т.е.

$$\operatorname{Re} \lambda_i \geq \lambda > 0$$

для всех собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $B$ ;

2) помехи  $\zeta_n(\hat{\theta}_{n-1})$  зависят только от  $n$  и  $\hat{\theta}_{n-1}$ , центрированы и взаимно независимы;

3) дисперсия помехи конечна, причем

$$E\{\zeta_n(X)\zeta_n^T(X)\} \leq W + T(X - \theta)(X - \theta)^T T^T,$$

здесь  $W$  и  $T$  —  $r \times r$ -матрицы;  $W$  — неотрицательно определенная симметричная матрица;

4) начальное приближение  $\hat{\theta}_0$  может быть детерминированным или случайным; в последнем случае предполагается, что существует

$$S_0 = E\{(\hat{\theta}_0 - \theta)(\hat{\theta}_0 - \theta)^T\};$$

Если  $\alpha_n \rightarrow \alpha > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда найдется такое  $\bar{\alpha}$ , что при  $0 < \alpha < \bar{\alpha}$

$$S_n \leq S_\infty + V_n,$$

где  $S_\infty$  — решение матричного уравнения

$$BS + SB^T = \alpha(W + BSB^T + TST^T)$$

и  $V_n \rightarrow 0$ .

Если  $\alpha_n \equiv \alpha$ ,  $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ , то  $\|V_n\| < c\rho^n$ ,  $\rho < 1$ .

В частности, если  $\alpha_n \equiv \alpha$ , а  $T = 0$ , то

$$V_n = (I - \alpha B)^n (S_0 - S_\infty) (I - \alpha B)^n.$$

Если  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , последовательность  $\{n\alpha_n\}$  монотонно возрастает и  $n\alpha_n \rightarrow \alpha > \lambda/2$  при  $n \rightarrow \infty$  (возможно,  $\alpha = \infty$ ), тогда

$$S_n \leq \alpha_n S + V_n,$$

где  $\|V_n\| = o(\alpha_n)$ , а  $S \leq 0$  — решение матричного уравнения

$$BS + SB^T = \alpha^{-1}S + W.$$

## П.4.2. Метод стохастической функции Ляпунова

Для анализа рекуррентных стохастических алгоритмов в нелинейном случае можно использовать подход, аналогичный второму методу Ляпунова в теории устойчивости. Первый общий результат, полученный таким образом, принадлежит Дж. Блюму [61].

Рассмотрим рекуррентный алгоритм в пространстве  $\mathbb{R}^r$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n Y_n,$$

где  $n$  — номер итерации;  $\hat{\theta}_n$  —  $r$ -мерные векторы;  $\alpha_n \geq 0$  — детерминированные скалярные множители (величины размера шагов);  $Y_n$  — случайные  $r$ -мерные векторы (направления движения).

Изучение сходимости процесса построения оценок проведем с помощью скалярной функции  $V(X)$  — аналога функции Ляпунова.

В следующей теореме сформулированы основные результаты о сходимости последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ :

**Теорема** [30, теоремы 1–3]. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *итеративный процесс имеет марковский характер, т.е. распределение случайного вектора  $Y_n$  зависит только от  $\hat{\theta}_{n-1}$  и  $n$ :  $Y_n = G_n(\omega, \hat{\theta}_{n-1})$ ;*

2) *функция  $V(X)$  — неотрицательна,  $\inf V(X) = 0$ ,  $V(X)$  — дифференцируема, а ее градиент удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\rho$  ( $0 < \rho \leq 1$ ):*

$$\|\nabla V(X) - \nabla V(\theta)\| \leq A\|X - \theta\|^\rho;$$

3) *условие псевдоградиентности:*

$$\langle \nabla V(X), E\{G_n(\omega, X)\} \rangle \geq \delta_n V(X) - \gamma_n,$$

с некоторыми последовательностями  $\delta_n > 0$ ,  $\gamma_n \geq 0$ ;

4) условие на  $G_n(\cdot, \cdot)$ :

$$E\{\|G_n(\omega, X)\|^{\rho+1}\} \leq \sigma_n^{\rho+1} + \tau_n V(X), \quad \sigma_n \geq 0, \quad \tau_n \geq 0.$$

5) условие на начальное приближение:  $E\{V(\hat{\theta}_0)\} < \infty$ ;

6) условие на последовательность  $\{\nu_n\}$ :

$$0 \leq \nu_n \leq 1, \quad \sum_n \nu_n = \infty,$$

где

$$\nu_n = \alpha_n \left( \delta_n - \frac{A\alpha_n^\rho \tau_n}{\rho + 1} \right); \quad \phi_n = \alpha_n \gamma_n + \frac{A}{\rho + 1} \alpha_n^{\rho+1} \sigma_n^{\rho+1};$$

$$\mu_n = \frac{\phi_n}{\nu_n}; \quad \lambda_n = \left( \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} - 1 \right) \frac{1}{\nu_n}; \quad \lambda'_n = \left( 1 - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \right) \frac{1}{\nu_{n+1}}.$$

Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n \leq \mu$ ,  $\mu \geq 0$ , тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\{V(\hat{\theta}_n)\} \leq \mu.$$

Если при этом  $\mu_n \leq \mu$  для всех  $n$ , то

$$E\{V(\hat{\theta}_n)\} \leq E\{V(\hat{\theta}_0)\} \prod_{i=0}^n (1 - \nu_i) + \mu \left( 1 - \prod_{i=0}^n (1 - \nu_i) \right).$$

Если  $\mu_n \rightarrow 0$ , тогда  $E\{V(\hat{\theta}_n)\} \rightarrow 0$ .

Если, кроме того,

а)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \leq \lambda < 1$ , то

$$E\{V(\hat{\theta}_n)\} \leq \frac{\mu_{n+1}}{1 - \lambda} + o(\mu_{n+1});$$

б)  $\lambda_n \leq \lambda < 1$  для всех  $n$ , то

$$E\{V(\hat{\theta}_n)\} \leq$$

$$\leq \mu_{n+1} \left( \frac{1}{1-\lambda} + \left( \frac{\mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\}}{\mu_0} - \frac{1}{1-\lambda} \right) \prod_{i=0}^n \left( 1 - (1-\lambda)\nu_i \right) \right);$$

в)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda'_n \geq \lambda > 1$ , то

$$\mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_n)\} = \mathcal{O}\left(\prod_{i=0}^n (1 - \nu_i)\right);$$

г)  $\lambda'_n \geq \lambda > 1$  для всех  $n$ , то

$$\mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_n)\} \leq \left( \mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\} + \frac{\mu_0}{1-\lambda} \right) \prod_{i=0}^n (1 - \nu_i).$$

Если  $\sum_n^\infty \phi_n < \infty$ , тогда  $V(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$  с вероятностью единицы. При этом для всякого  $\varepsilon > 0$ ,  $n_0 \geq 0$

$$\mathbf{P}\{V(\hat{\theta}_n) \leq \varepsilon \forall n \geq n_0\} \geq 1 - \frac{\mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\} + \sum_n^\infty \phi_n}{\varepsilon}.$$

Если, кроме того,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda'_n \geq \lambda > 1$ , то для всякого  $K > 0$  найдется такое  $C = C(K, \mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\})$ , что

$$\mathbf{P}\left\{V(\hat{\theta}_n) \leq (C + K) \prod_{i=0}^n (1 - \nu_i) \forall n\right\} \geq 1 - \frac{C}{K},$$

а если  $\lambda'_n \geq \lambda > 1$  для всех  $n$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{V(\hat{\theta}_n) \leq \left(K + \mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\} + \frac{\mu_0}{1-\lambda}\right) \prod_{i=0}^n (1 - \nu_i) \forall n\right\} &\geq \\ &\geq 1 - \frac{\mathbf{E}\{V(\hat{\theta}_0)\}}{K} - \frac{\mu_0}{K(\lambda - 1)}. \end{aligned}$$



- Алгоритм конечно-сходящийся** 99  
 — оптимизации 6  
 — оценивания 7  
 — "Полоска" 103  
 — псевдоградиентный 68  
 — рандомизированный 29  
 — робастный 77  
 — с ограничениями 77  
 — с проекцией 77  
 — с усреднением 75  
 — случайного поиска 8, 16, 80  
 — стохастической аппроксимации 61  
 — — — пассивной 73  
 — — — поисковый 69  
 — — — рандомизированный 69  
 — — — с возмущением на входе 70  
 — — — с направлениями случайными 69  
 — — — фиксированными 68  
 — SPSA 69
- Байесовский подход** 85
- Вектор случайный** 109  
 — — строго ортогональный 35
- Величина рабочего шага** 61  
 — случайная 107  
 — — гауссовская 35
- Возмущение пробное одновременное** 68
- Выборка послойная** 75
- Дисперсия** 108
- Закон больших чисел** 110  
 — усиленный 111
- Интерполяция** 48
- Ковариация** 108
- Коэффициент весовой** 39  
 — усиления калмановский 57
- Линия регрессии** 34
- Логарифм правдоподобия** 23, 90
- Математическое ожидание** 107
- Матрица информационная Фишера** 94
- Медиана** 86, 92
- Метод градиентный** 8  
 — Винера–Колмогорова 47  
 — итеративный 7  
 — Ляпунова 118  
 — максимального правдоподобия 23, 91  
 — наименьших квадратов 6, 10, 37  
 — — — модифицированный 45  
 — — — — рекуррентный 45  
 — — — — обобщенный 44  
 — Монте–Карло 83  
 — Ньютона 63  
 — рекуррентный 7  
 — случайного поиска 80  
 — стохастической аппроксимации 61  
 — эллипсоидов 104  
 — эмпирического функционала 84
- Мода** 86
- Модель авторегрессии** 42  
 — — скользящего среднего 42  
 — линейной регрессии 34  
 — регрессии 33  
 — скользящего среднего 42
- Независимость** 109
- Некоррелированность** 108
- Неравенство Гёльдера** 110  
 — Иенсена 110

- Крамера–Рао 94
- Чебышева 109
- целевое 99
- — рекуррентное 100

**Оптимизация** 7

Отклонение стандартное 108

Оценивание 6

Оценка байесовская 85, 88

- линейная 37
- марковская 39
- ММП 91
- МНК 37
- — обобщенного 38
- — рекуррентного 44
- — — модифицированного 45
- — — обобщенного 44
- — — рандомизированного 46
- несмещенная 37
- сильносостоятельная 37
- состоятельная 37
- усеченная 76
- усредненная 75
- эффективные 95

Ошибка оценивания 37

**Плотность апостериорная** 87

- априорная 87
- спектральная 112
- функции распределения 108

Погрешность 6

- систематическая 5
- статистическая 5

Помеха независимая 22

- почти произвольная 41, 97
- центрированная 22

Пороговое значение 26

Последовательность случайная 109

Пробное одновременное возмущение 29, 68

Прогноз 48

Процедура Кифера–Вольфовица 8, 67

- Роббинса–Монро 8, 64

Процесс стационарный 111

- стационарно связанный 112

**Распределение** 108

- гауссовское 108

- нормальное 108

Реализация 109

Регрессия 34

Решащее правило 26

**Сепарация** 50

Сигнал полезный 21

Субградиент 79

**Теорема Гаусса–Маркова** 39

Траектория 109

**Уравнение Винера–Хопфа** 55

- регрессии 61

Условие Гёльдера 118

- постоянного возбуждения 45
- псевдоградиентности 118

Условное среднее 86

Усреднение с весами 24

**Факторизация** 49, 115

Фильтр Винера–Колмогорова 12, 50

- Калмана–Бьюси 14, 47, 57
- линейный 48

Фильтрация 48

- оптимальная 47

Формула Байеса 86

Функционал качества 7

- среднего риска 7, 29
- эмпирический 38, 84

Функция весовая фильтра 48

- Ляпунова 118
- передаточная фильтра 48
- потерь 7, 29
- правдоподобия 23, 90
- распределения 108
- регрессии 7
- спектральная 112
- средних потерь 30
- устойчивая 48
- целевая 7
- штрафная 30

**Экстраполяция** 48

1. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 223 с.
2. **Браммер К., Зиффлинг Г.** Фильтр Калмана–Бьюси: детерминированные наблюдения и стохастическая фильтрация. М.: Наука, 1982. 199 с.
3. **Вазан М.** Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 295 с.
4. **Вапник В.Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 447 с.
5. **Винер Н.** Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. 344 с.
6. **Граничин О.Н.** Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та Сер. 1. 1989. Вып. 1. С. 19–21.
7. **Граничин О.Н.** Оценивание параметров линейной регрессии при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. No. 1. С. 30–41.
8. **Граничин О.Н.** Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. No. 2. С. 44–55.

9. **Граничин О.Н.** Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 2002. No. 9. С. 125–133.
10. **Граничин О.Н., Поляк Б.Т.** Рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания при почти произвольных помехах. М.: Наука. В печати.
11. **Еремин И.И.** Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств // Доклады АН СССР. 1962. Т. 143, No. 6. С. 1254–1256.
12. **Ермаков С.М.** Метод Монте–Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. 471 с.
13. **Ермаков С.М., Жиглявский А.А.** Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.
14. **Ермольев Ю.М.** Методы стохастического программирования. М.: Наука. 1976. 239 с.
15. **Жилинскас А.** Глобальная оптимизация. Вильнюс: Мокслас, 1986. 165 с.
16. **Калман Р.Е., Бьюси Р.С.** Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Труды американского общества инженеров-механиков. Техническая механика. Сер. Д. 1961. Т. 83, No 1. С. 123–141.
17. **Катковник В.Я.** Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М.: Наука, 1976. 487 с.
18. **Колмогоров А.Н.** Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР. Сер. матем. 1941. No. 5. С. 3–14.
19. **Котельников В.А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. 151 с.

20. **Красулина Т.П.**, О вероятности непревышения искомого порога алгоритмом стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1998. № 10. С. 90–94.
21. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдения в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
22. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
23. **Льюнг Л., Седерстрем Т.** Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 431 с.
24. **Марков А.А.** Исчисление вероятностей. М.: ГИЗ, 1924.
25. **Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.** Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987. 279 с.
26. **Назин А.В., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.** Пассивная стохастическая аппроксимация // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 127–134.
27. **Назин А.В., Позняк А.С.** Адаптивный выбор вариантов: рекуррентные алгоритмы. М.: Наука, 1986. 288 с.
28. **Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.** Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.
29. **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. 1973. № 3. С. 45–68.
30. **Поляк Б.Т.** Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. 1. Общий случай // Автоматика и телемеханика. 1976. № 12. С. 83–94.

31. **Поляк Б.Т.** Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. 2. Линейный случай // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 101–107.
32. **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 74–84.
33. **Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.** Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика. 1980. № 10. С. 91–97.
34. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
35. **Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.** Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 2. С. 45–53.
36. **Поляк Б.Т.** Новый метод типа стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1990. № 7. С. 98–108.
37. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
38. **Растрингин Л.А.** Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.
39. **Растрингин Л.А.** Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981. 386 с..
40. **Срагович В.Г.** Адаптивное управление. М.: Наука, 1981. 384 с.

41. **Стратонович А.Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1966. 319 с.
42. **Урясьев С.П.** Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.: Наука, 1990. 182 с.
43. **Фельдбаум А.А.** О проблемах дуального управления // Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972. С. 89–108.
44. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
45. **Фомин В.Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 288 с.
46. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 336 с.
47. **Фомин В.Н.** Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 306 с.
48. **Фомин В.Н.** Оптимальная и адаптивная фильтрация. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. В печати.
49. **Цыпкин Я.З.** Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400 с.
50. **Цыпкин Я.З.** Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. 252 с.
51. **Цыпкин Я.З.** Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984. 320 с.

52. **Цыпкин Я.З.** Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
53. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
54. **Шильман С.В.** Адаптивная фильтрация временных рядов. Н.Новгород: Изд-во Н.-Новг. ун-та, 1995. 180 с.
55. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.
56. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
57. **Эльясберг П.Е.** Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
58. **Якубович В.А.** Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Доклады АН СССР. 1966. Т. 166, No. 6. С. 1308–1311.
59. **Якубович В.А.** Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: Научн. сов. по кибернетике АН СССР, 1976. С. 32–63.
60. **Agmon S., Motzkin T., Shoenberg I.J.** The relaxation method for linear inequalities // Canadian J. Math. 1954. Vol. 6. P. 382–404.
61. **Blum J.R.** Multidimensional stochastic approximation // Ann. Math. Statist. 1954. Vol. 9. P. 737–744.
62. **Bode H.W., Shannon C.E.** A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory // Proc. IRE. 1950. N 38. P. 417–425.



63. **Chen H.F., Duncan T.E., Pasik–Duncan B.** A Kiefer–Wolfowitz algorithm with randomized differences // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1999. Vol. 44, N 3. P. 442–453.
64. **Fabian V.** Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed // *Ann. Math. Statist.* 1967. Vol. 38. P. 191–200.
65. **Fisher R.A.** The design of experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.
66. **Goldenshluger A.V., Polyak B.T.** Estimation of regression parameters with arbitrary noise // *Mathem. Methods Statist.* 1993. Vol. 2, N 1. P. 18–29.
67. **Guo L.** Self–convergence of weighted least–squares with applications to stochastic adaptive control // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1996. Vol. 41, N 1. P. 79–89.
68. **Kiefer J., Wolfowitz J.** Statistical estimation on the maximum of a regression function // *Ann. Math. Statist.* 1952. Vol. 23. P. 462–466.
69. **Kushner H.J., Yin G.G.** Stochastic approximation algorithms and applications. New York: Springer–Verlag, 1997. 415 p.
70. **Ljung L., Guo L.** The role of model validation for assessing the size of the unmodeled dynamics // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1997. Vol. 42, N 9. P. 1230–1239.
71. **Polyak B.T., Yuditskij A.B.** Acceleration of stochastic approximation procedures by averaging // *SIAM J. Contr. Optim.* 1992. Vol. 30, N 4. P. 838–855.
72. **Polyak B.T.** Random algorithms for solving convex inequalities // *Inherently parallel algorithms in feasibility and*

optimization and their applications. / Eds.: D. Butnaru, Y. Censor and S. Reich. Elsevier, 2001. P. 409–422.

73. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. Vol. 22. P. 400–407.
74. **Robbins H., Siegmund D.** A convergence theorem for nonnegative almost super-martingales and some applications // Optimizing methods in statistics. / Ed. J.S. Rustagi. New York: Academic Press, 1971. P. 233–257.
75. **Schweppe F.C.** Uncertain dynamic systems. New York–London: Prentic–Hall, 1973. 563 p.
76. **Spall J.C.** Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Trans. on Automatic Control. 1992. Vol. 37. P. 332–341.
77. **Vidyasagar M.** Statistical learning theory and randomized algorithms for control // IEEE Control Systems. 1998. N 12. P. 69–85.
78. **Weiner N.** The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering application. New York: Technology Press and Wiley, 1949.

Учебное издание  
*Олег Николаевич Граничин*

Введение в методы  
стохастической оптимизации  
и оценивания

Учебное пособие

Редактор *Т.В. Мызникова*  
Компьютерная верстка *О.Н. Граничин*  
Художественный редактор *Е.И. Егорова*  
Издание подготовлено в MiKTeX 2.0